

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра квантовой оптики (физика оптических явлений)

Направление подготовки **03.04.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **МАГИСТРАТУРА**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(научно-исследовательский формат/проектно-исследовательский формат)

Глухова Стефания Андреевна

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы: «Моделирование рассеяния бесселевых пучков частицами вблизи плоской подложки».

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

Научный руководитель

д. ф.-м. н., академик РАН, профессор

к. ф.-м. н.

науч. рук., зав. лаб. ИАиЭ СО РАН

с. н. с. ИХКГ СО РАН

Шалагин А. М./.....

Юркин М. А./.....

(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....».....20...г.

Новосибирск, 2022

Оглавление

1. Введение	3
2. Основная часть	6
2.1. Литературный обзор.....	6
2.1.1. Рассеяние электромагнитных волн.....	6
2.1.2. Отражение и преломление света.....	12
2.1.3. Метод дискретных диполей и ADDA.....	15
2.1.4. Описание бесселевых пучков.....	17
2.1.5. Разложение бесселевых пучков на плоские волны	27
2.2. Теоретическая часть.....	31
2.2.1. Обобщение бесселевых пучков.....	31
2.2.2. Разложение обобщенного бесселева пучка на плоские волны	47
2.3. Моделирование.....	52
2.3.1. Реализация в коде ADDA	52
2.3.2. Вычисление падающего поля.....	53
2.3.3. Тестирование моделирования рассеяния	60
2.3.4. Результаты моделирования	62
2.4. Выводы	65
3. Заключение.....	67
4. Источники	68

1. Введение

Бесселевы пучки являются особым классом структурированного электромагнитного излучения и находят применение в широком спектре передовых технологий фотоники. Одной из наиболее замечательных особенностей бесселева пучка является отсутствие дифракции, т. е. способность распространяться, сохраняя профиль вблизи оси пучка. Подобно плоской волне, такие идеальные бесселевы пучки имеют бесконечный поток энергии и мощности, следовательно, не могут быть получены экспериментально. Однако использование конечных апертур позволяет получить усеченный бесселев пучок, который правильнее называть «дифракционно-компенсированным», так как расходимость в нем компенсируется боковым подводом энергии [1]. Такие квази-бесселевы пучки могут распространяться на большие расстояния без существенной расходимости. Много усилий было направлено на создание бесселевых пучков более высокого порядка и/или вихревых пучков с использованием различных фазовых преобразователей волны или конических линз (аксиконов) [2], голограмм [3], или метаповерхностей [4]. Полученные бесселевы пучки активно используются в таких областях, как оптические манипуляции [5,6], обработка материалов [7,8], и визуализация [9].

За последние два десятилетия теоретическое описание векторных бесселевых пучков имело большой интерес и рассматривалось во многих трудах. В некоторых работах [10–12] удалось описать некоторые типы векторных бесселевых пучков с использованием подхода Дэвиса — где электромагнитное поле пучков выводится через векторные потенциалы Герца, а также с помощью углового спектрального разложения (в иностранной литературе используется термин ASD method — angular spectrum decomposition) [13]. Несмотря на существующие расхождения среди названий различных типов векторных бесселевых пучков, можно

выделить следующие типы: пучки с осесимметричной плотностью энергии (circularly symmetric energy density — CS тип); пучки с поперечным электрическим или магнитным полем — TE и TM типы соответственно; и пучки с линейными поляризациями электрического или магнитного поля — LE и LM типы соответственно. Также существуют пучки с нецелым порядком, однако в данной работе они не рассматриваются [14,15]. Важно отметить, что предыдущие теоретические описания в основном фрагментарны и сосредоточены на конкретных приложениях. Более общие классификации [12,15,16] громоздки, поскольку за длинными формулами скрываются связи между различными типами пучков Бесселя. Более того, обсуждение базисов бесселевых пучков хоть и затрагивалось в предыдущих работах, но не было полноценным. Наконец, во всех существующих описаниях отсутствует обсуждение преобразований вращения бесселевых пучков (частично обсуждалось в [17]), что необходимо для обобщения формализма матрицы рассеяния (исчисления Мюллера [18]), обычно используемого в случае рассеяния плоских волн.

Во многих применениях бесселевых пучков важную роль играет процесс рассеяния света на различных объектах. Несмотря на то, что рассеяние бесселевых пучков на частицах простой формы, такой как шар или сфероид, не единожды рассматривалось в литературе [13,19–25], их рассеяние на частицах сложной формы встречается значительно реже [26,27]. Также зачастую, исследуемые объекты, освещаемые бесселевыми пучками, находятся на какой-либо подложке. Поэтому, также важно учитывать вклад подложки в результирующее поле. Исследование процессов отражения или преломления бесселевых пучков вблизи границы раздела различных сред приводилось в работах [28–32].

Целью данной работы является создание инструмента для моделирования рассеяния бесселевых пучков частицами произвольной формы, находящихся вблизи плоской подложки. Для этого используется

метод дискретных диполей (МДД), который является численно точным методом вычисления рассеяния и поглощения электромагнитных волн частицами произвольной формы [33,34]. Суть метода заключается в том, что рассеивающая частица делится на малые кубические объёмы, которые могут быть заменены на точечные диполи. Они взаимодействуют друг с другом и с падающей волной. Ввиду объемной дискретизации, МДД позволяет рассматривать задачу рассеяния для частиц произвольной формы.

Одной из существующих реализаций МДД является программный пакет ADDA [35], который является универсальным инструментом, подходящим для широкого спектра применений, от межзвездной пыли и атмосферных аэрозолей до биологических клеток и нано-частиц; его применимость ограничена только доступными компьютерными ресурсами. Более того, в ADDA уже имеется реализация рассеяния плоских волн вблизи плоской подложки, которую можно использовать для реализации рассеяния бесселевых пучков, разложив их в суперпозицию плоских волн. Таким образом, основной целью данной работы была реализация моделирования рассеяния бесселевых пучков частицами, находящимся вблизи плоской подложки, методом дискретных диполей в программном пакете ADDA.

2. Основная часть

2.1. Литературный обзор

2.1.1. Рассеяние электромагнитных волн

Эта глава следует изложению из [36]. Падение электромагнитной волны на препятствие в виде отдельного электрона, молекулы или частицы, вызывает колебательное движение входящих в состав заряженных частиц. Ускоренное движение заряженных частиц порождает вторичное излучение — рассеянное излучение. При этом часть энергии падающей электромагнитной волны может перейти в другие виды энергии, например, во внутреннюю энергию частицы. В таком случае имеет место процесс поглощения. Принцип рассеяния электромагнитной волны частицей схематично изображен на Рис. 1 и Рис. 2. Рассеивающую частицу можно разбить на малые объемы, и результирующее рассеянное поле в точке Р будет являться суммой всех элементарных волн от малых объемов, на которые разбита частица.

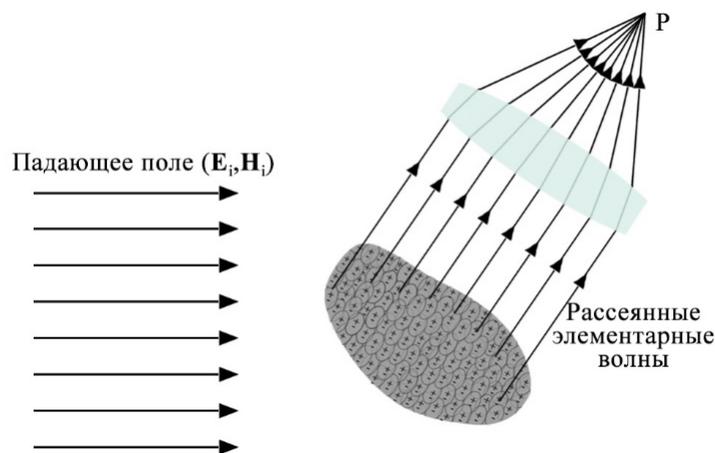


Рис. 1. Схема рассеяния света частицей [36].

При их сложении должны учитываться фазовые соотношения между элементарными волнами, которые зависят от направления рассеяния. В

результате рассеянное поле также будет меняться в зависимости от направления рассеяния.

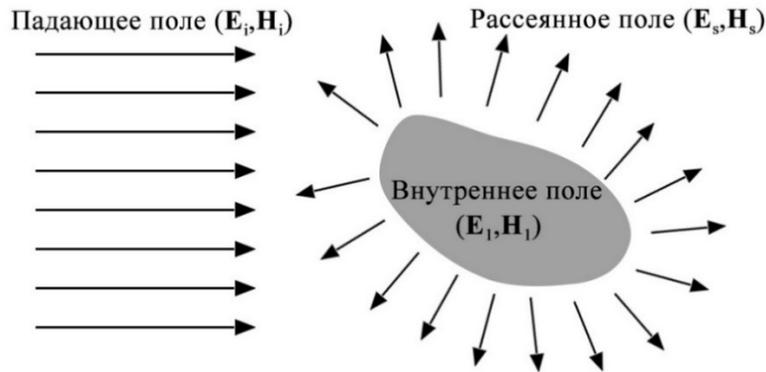


Рис. 2. Иллюстрация полей [36].

Для описания рассеяния и поглощения электромагнитных волн необходимо опираться на систему уравнений Максвелла [36]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_F, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_F + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4)$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, \mathbf{B} – магнитная индукция, \mathbf{D} – электрическая индукция, \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, ρ_F – плотность свободных зарядов, \mathbf{J}_F – плотность свободных токов. Здесь и далее мы работаем в частотной области и поэтому опускаем временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ электромагнитных волн. Напряженность магнитного поля и электрическая индукция определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (6)$$

где \mathbf{P} — электрическая поляризация (средний электрический дипольный момент единицы объема), \mathbf{M} — намагниченность (средний магнитный дипольный момент единицы объема), ε_0 — диэлектрическая проницаемость, а μ_0 — магнитная проницаемость свободного пространства. Также важным для моделирования процесса светорассеяния и поглощения является одно из материальных уравнений:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (7)$$

где χ — электрическая восприимчивость, которая в общем случае зависит от свойств рассматриваемой среды. Также решения \mathbf{E} и \mathbf{H} системы уравнений Максвелла и материальных уравнений должны удовлетворять граничным условиям.

Учитывая линейность уравнений Максвелла и представляя произвольную падающую волну в виде суперпозиции плоских монохроматических волн (представление в виде преобразования Фурье), задачу рассеяния можно решать для двух плоских волн с ортогональными поляризациями [36], что рассмотрено подробнее ниже. При этом при решении задачи рассеяния электромагнитной волны немагнитными частицами ($\mu = 1$) достаточно ограничиться рассмотрением только электрического поля. Геометрию рассеяния плоской волны частицей можно определить следующим образом (Рис. 3): ось z задается направлением распространения падающей волны. Начало декартовой системы координат (x, y, z) можно установить на любой точке рассеивающей частицы.

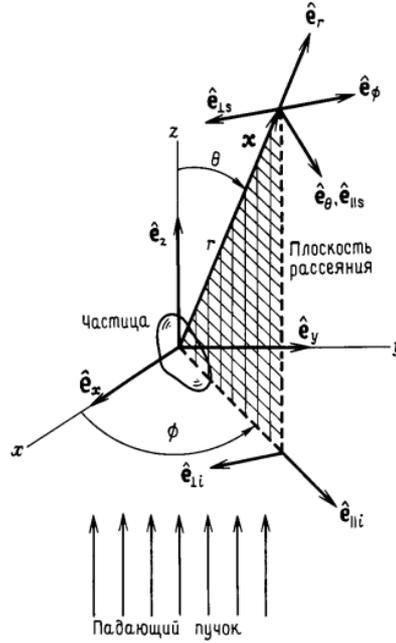


Рис. 3. Геометрия рассеяния плоской волны произвольной частицей [36].

Направление рассеяния \mathbf{e} и \mathbf{e}_z задают плоскость рассеяния, аналогичную плоскости падения в задачах отражения на плоской границе. Плоскость рассеяния однозначно определяется азимутальным углом φ , за исключением случая, когда \mathbf{e}_r параллелен оси z . В этом случае ($\mathbf{e}_r = \pm \mathbf{e}_z$) в качестве плоскости рассеяния может быть выбрана любая плоскость, содержащая ось z . Вектор \mathbf{E}_i – падающего электрического поля (индекс i – incident), лежащий в плоскости xu , можно разложить на параллельную ($\mathbf{E}_{\parallel i}$) и перпендикулярную ($\mathbf{E}_{\perp i}$) к плоскости рассеяния компоненты:

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_{0\parallel} \mathbf{e}_{\parallel i} + \mathbf{E}_{0\perp} \mathbf{e}_{\perp i}) \exp(ikz) = E_{\parallel i} \mathbf{e}_{\parallel i} + E_{\perp i} \mathbf{e}_{\perp i}, \quad (8)$$

где $k = 2\pi n_1/\lambda$ — волновое число в среде, окружающей частицу, n_1 — показатель преломления, а λ — длина волны падающего света в вакууме.

Векторы ортонормированного базиса

$$\mathbf{e}_{\perp i} = \sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_{\parallel i} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (9)$$

вместе с \mathbf{e}_z образуют правую тройку:

$$\mathbf{e}_{\perp i} \times \mathbf{e}_{\parallel i} = \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

В дальней зоне, т.е. на достаточно больших расстояниях от начала координат ($kr \gg 1$), рассеянное электрическое поле \mathbf{E}_s (индекс s — scattering) приближенно является поперечным ($\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_s \cong 0$) и имеет асимптотический вид

$$\mathbf{E}_s \sim \frac{e^{ikr}}{-ikr} \mathbf{A}, \quad kr \gg 1, \quad (11)$$

где $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A} = 0$. Соответственно рассеянное поле в дальней зоне может быть записано как

$$\mathbf{E}_s = E_{\parallel s} \mathbf{e}_{\parallel s} + E_{\perp s} \mathbf{e}_{\perp s}. \quad (12)$$

Базисный вектор $\mathbf{e}_{\parallel s}$ параллелен, а $\mathbf{e}_{\perp s}$ перпендикулярен плоскости рассеяния. Отметим, что \mathbf{E}_s и \mathbf{E}_i определены в различных системах базисных векторов. Вследствие линейности граничных условий амплитуда поля, рассеянного произвольной частицей, является линейной функцией амплитуды падающего поля. Связь между падающим и рассеянным полями удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где элементы S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) - элементы амплитудной матрицы рассеяния, которые, как правило, зависят от угла рассеяния θ и азимутального угла φ .

В задачах рассеяния крайне важную роль играют параметры Стокса (I_i, Q_i, U_i, V_i), которые являются альтернативной формой описания поляризованного света. При этом, они выражаются через непосредственно измеряемые величины [36]:

$$I = E_{\parallel} E_{\parallel}^* + E_{\perp} E_{\perp}^*, \quad (14)$$

$$Q = E_{\parallel} E_{\parallel}^* - E_{\perp} E_{\perp}^*, \quad (15)$$

$$U = E_{\parallel} E_{\perp}^* + E_{\perp} E_{\parallel}^*, \quad (16)$$

$$V = i(E_{\parallel} E_{\perp}^* - E_{\perp} E_{\parallel}^*). \quad (17)$$

Вектор Стокса для рассеянной волны можно выразить через вектор Стокса падающей волны с помощью матрицы рассеяния, которую также называют матрицей Мюллера. Элементы матрицы рассеяния определяются амплитудной матрицей рассеяния:

$$\begin{pmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 r^2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$S_{11} = \frac{1}{2} (|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2), \quad (19)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} (|S_2|^2 - |S_1|^2 + |S_4|^2 - |S_3|^2), \quad (20)$$

$$S_{13} = \operatorname{Re}(S_2 S_3^* + S_2 S_3^*), \quad (21)$$

$$S_{14} = \operatorname{Im}(S_2 S_3^* - S_2 S_3^*), \quad (22)$$

$$S_{21} = \frac{1}{2} (|S_2|^2 - |S_1|^2 - |S_4|^2 + |S_3|^2), \quad (23)$$

$$S_{22} = \frac{1}{2} (|S_2|^2 + |S_1|^2 - |S_4|^2 - |S_3|^2), \quad (24)$$

$$S_{23} = \operatorname{Re}(S_2 S_3^* - S_1 S_4^*), \quad (25)$$

$$S_{24} = \operatorname{Im}(S_2 S_3^* + S_1 S_4^*), \quad (26)$$

$$S_{31} = \operatorname{Re}(S_2 S_4^* + S_1 S_3^*), \quad (27)$$

$$S_{32} = \operatorname{Re}(S_2 S_4^* - S_1 S_3^*), \quad (28)$$

$$S_{33} = \operatorname{Re}(S_1 S_2^* + S_3 S_4^*), \quad (29)$$

$$S_{34} = \operatorname{Im}(S_2 S_1^* + S_4 S_3^*), \quad (30)$$

$$S_{41} = \operatorname{Im}(S_2 S_4^* + S_3 S_1^*), \quad (31)$$

$$S_{42} = \operatorname{Im}(S_2 S_4^* - S_3 S_1^*), \quad (32)$$

$$S_{43} = \operatorname{Im}(S_1 S_2^* - S_3 S_4^*), \quad (33)$$

$$S_{44} = \operatorname{Re}(S_1 S_2^* - S_3 S_4^*). \quad (34)$$

Параметры Стокса для волны, рассеянной множеством частиц, являются суммой параметров Стокса для волн, рассеянных каждой частицей. В связи с этим, матрица рассеяния также является суммой матриц

рассеяния для отдельных частиц. Обобщение формализма матриц рассеяния для основных типов бесселевых пучков проведено в предыдущей работе [17].

2.1.2. Отражение и преломление света

В случае, когда рассеивающая частица находится вблизи подложки, необходимо учитывать явление отражения и преломления падающего света на границе раздела сред. Здесь и далее будем обозначать за n_1 показатель преломления среды, в которой находится рассеивающая частица, а за n_2 – показатель преломления подложки. Исходное поле плоской волны в однородной среде обозначим \mathbf{E}_0 , отраженное поле \mathbf{E}_r и преломленное поле \mathbf{E}_t . Соответствующим образом обозначим волновые вектора исходного поля, отраженного и преломленного: \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_r и \mathbf{k}_t . При этом падающее поле \mathbf{E}_i из предыдущего раздела 2.1.1 будет зависеть от направления падения исходного поля \mathbf{E}_0 : если волна падает на частицу сверху подложки, то падающее поле будет равно $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_r$; если же волна приходит из подложки, то $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_t$ (Рис. 4). Далее в этом разделе под падающей волной будем подразумевать именно исходное поле для более стандартного описания.

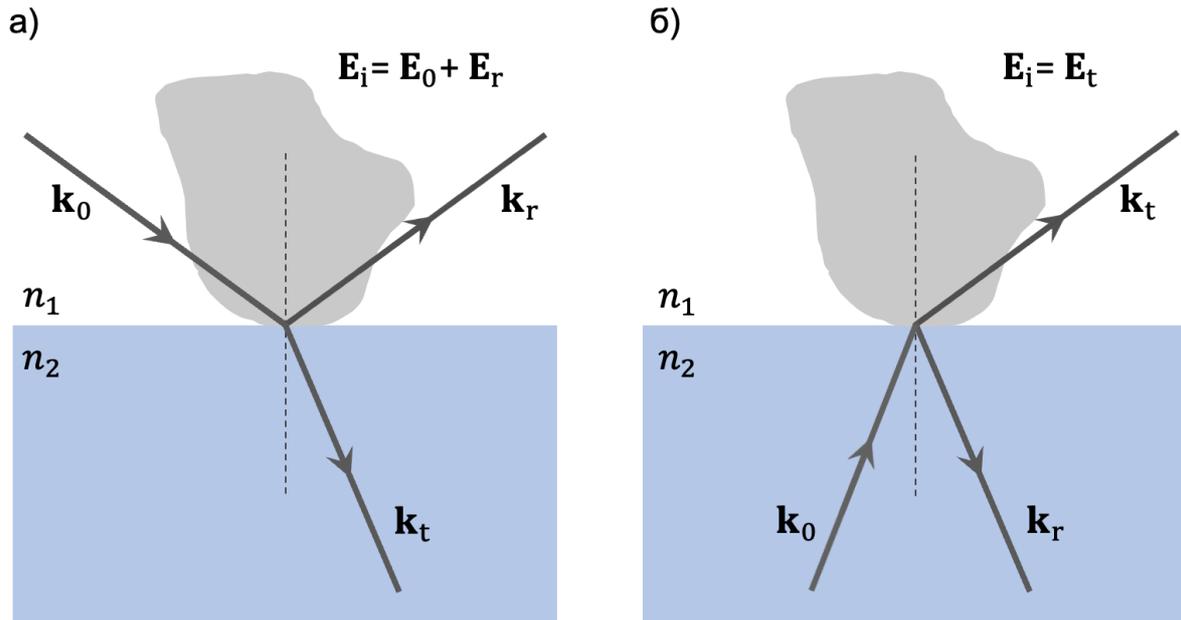


Рис. 4. Схема падающего на частицу поля при наличии подложки, а) когда поле падает сверху подложки, б) когда поле приходит из подложки.

После, следует детальнее рассмотреть процесс отражения и преломления плоских волн в соответствии с изложением из [37] и [38]. В первую очередь выполняется закон отражения: угол падения равен углу отражения $\theta_0 = \theta_r$. Также выполняется закон преломления Снеллиуса: $n_1 \sin \theta_0 = n_2 \sin \theta_t$. Оба этих закона являются следствием волновой природы света и вытекают из граничных условий.

Поляризация падающей волны влияет на то, как она будет отражаться и преломляться при падении на границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 , в общем случае комплексными. Вектор напряжённости электрического поля падающей электромагнитной волны \mathbf{E}_0 можно разложить в две поляризации — перпендикулярную и параллельную плоскости падения (плоскость, в которой лежат \mathbf{k}_0 и \mathbf{n} — вектор нормали границы раздела сред). Перпендикулярную поляризацию еще называют s-поляризацией, а параллельную p-поляризацией (Рис. 5), и выражения для единичных векторов электрического поля записываются так [38]:

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{k}_0}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_0\|}, \quad \mathbf{e}_p = \frac{\mathbf{k}_0 \times \mathbf{e}_s}{k_0}. \quad (35)$$

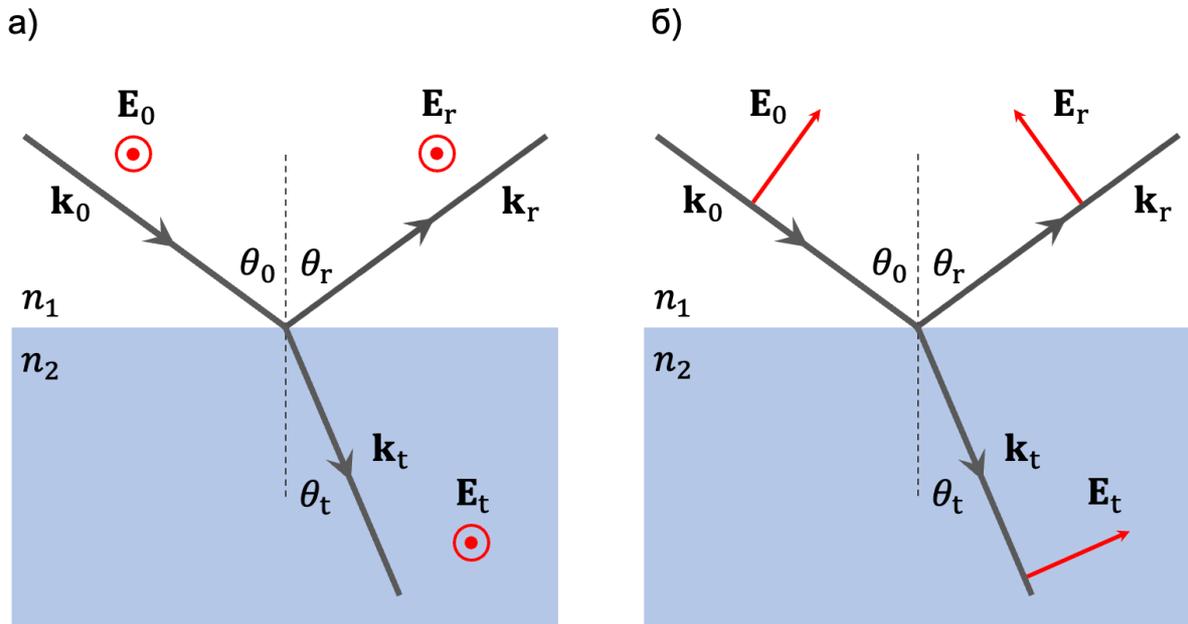


Рис. 5. Падающая, отражённая и преломлённая волны на границе раздела двух сред а) для s-поляризации и б) для р-поляризации.

Амплитуды отраженной E_r и преломленной E_t волн выражаются через амплитуду падающего поля с помощью коэффициентов отражения $r = E_r/E_0$ и преломления $t = E_t/E_0$. Коэффициенты отражения и преломления r_s , r_p и t_s , t_p для s и p поляризаций, соответственно, определяются формулами Френеля:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_0 + n_2 \cos \theta_t}, & t_s &= \frac{2n_1 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_0 + n_2 \cos \theta_t}, \\ r_p &= \frac{n_2 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_t}, & t_p &= \frac{2n_1 \cos \theta_0}{n_2 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_t}, \end{aligned} \quad (36)$$

где θ_0 , и θ_t — углы между нормалью границы раздела сред и волновыми векторами падающей и преломленной волны (см. Рис. 5).

Особыми случаями являются падение волны под углом Брюстера и случай полного внутреннего отражения. В первом случае, при падении под углом

$$\theta_{\text{Б}} = \arctan \frac{n_2}{n_1}, \quad (37)$$

отсутствует отраженная волна, что следует из закона Снеллиуса и Ур. (36). Следующий особый случай — полное внутреннее отражение возникает, когда угол падения достигает значения

$$\theta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}. \quad (38)$$

При падении под таким углом преломленная волна распространяется параллельно границе раздела сред.

2.1.3. Метод дискретных диполей и ADDA

Метод дискретных диполей является численно точным общим методом моделирования рассеяния и поглощения электромагнитных волн частицами произвольной формы [34]. Программа ADDA является реализацией метода дискретных диполей с открытым кодом на языке программирования С [35]. Данный метод подразумевает решение системы линейных уравнений относительно неизвестных дипольных поляризаций \mathbf{P}_i :

$$\bar{\alpha}_i^{-1} \mathbf{P}_i - \omega^2 \mu_0 \sum_{j \neq i} \bar{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{P}_j = \mathbf{E}_i^{\text{inc}}, \quad (39)$$

где $\mathbf{E}_i^{\text{inc}}$ — падающее электромагнитное поле, $\bar{\alpha}_i^{-1}$ — дипольная поляризуемость (в общем случае является тензором), $\bar{\mathbf{H}}_{ij}$ — в общем случае член, отвечающий за взаимодействие диполей (тензор Грина окружающей среды). Решение системы линейных уравнений в ADDA реализовано с помощью итерационного метода. В случае рассеяния в свободном пространстве $\bar{\mathbf{H}}_{ij} = \bar{\mathbf{G}}_{ij}$. При наличии поверхности в этом выражении появляется слагаемое, связанное с отражением $\bar{\mathbf{R}}_{ij}$ ($\bar{\mathbf{H}}_{ij} = \bar{\mathbf{G}}_{ij} + \bar{\mathbf{R}}_{ij}$). Полное поле внутри однородной частицы \mathbf{E}_i (внутреннее поле) создается массивом диполей. Оно также называется макроскопическим полем. Его

следует отличать от возбуждающего электрического поля $\mathbf{E}_i^{\text{exc}}$, которое является суммой $\mathbf{E}_i^{\text{inc}}$ и поля, созданного всеми диполями кроме i -го. Таким образом поляризацию можно записать

$$\mathbf{P}_i = \bar{\alpha}_i \mathbf{E}_i^{\text{exc}} = \varepsilon_0 V_d \chi_i \mathbf{E}_i, \quad (40)$$

где $V_d = d^3$ — объем диполя и $\chi_i = (\varepsilon_i/\varepsilon_0) - 1$ — восприимчивость среды вблизи диполя (ε_i — диэлектрическая проницаемость среды в местоположении данного диполя).

В ADDA реализованы различные выражения для поляризуемости, например, самая простая из них формула Клаузиуса–Моссотти (CM)

$$\bar{\alpha}_i^{\text{CM}} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_0} \bar{\mathbf{I}} V_d, \quad (41)$$

где $\bar{\mathbf{I}}$ — единичный тензор.

В свободном пространстве взаимодействие диполей описывается тензором Грина:

$$\bar{\mathbf{G}}_{ij} = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R} \left[\left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}{R^2} \right) - \frac{1 - ikR}{k^2 R^2} \left(\bar{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}{R^2} \right) \right], \quad (42)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор центра диполя, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $R = |\mathbf{R}|$, $\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$ — тензор, определяемый равенством $(\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})_{\mu\nu} = R_\mu R_\nu$.

Программа ADDA позволяет вычислять матрицу Мюллера и другие характеристики рассеяния для частицы произвольной формы [35]. В качестве падающего поля в ADDA уже имеется реализация для плоской волны и всех типов бесселевых пучков, что частично было реализовано в рамках предыдущей работы [17]. И хотя в той работе уже были показаны взаимосвязи различных типов бесселевых пучков, в ней не было детального обсуждения различных базисов этих пучков.

Вычисление величин рассеяния частицами, находящимися вблизи плоской подложки, в ADDA доступно только для плоской волны. Для того, чтобы реализовать рассеяние бесселевых пучков вблизи плоской подложки, удобно воспользоваться имеющейся реализацией для плоской волны,

разложив бesselев пучок в суперпозицию плоских волн, что обсуждается в разделе 2.1.5.

2.1.4. Описание бesselевых пучков

2.1.4.1. Векторные потенциалы Герца

Данный раздел частично повторяет изложение нашей статьи по классификации бesselевых пучков [39], а также ряд результатов из трудов конференций [40–42]. Мы рассматриваем монохроматические электромагнитные волны (пучки) с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ в однородной изотропной среде (с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε , проницаемостью μ и волновым сопротивлением $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mu/\varepsilon}$) без явного учета источников, которые их производят. Другими словами, мы предполагаем, что источники расположены на бесконечности. В данной работе используются единицы СИ, хотя это делает некоторые выражения немного более сложными, чем для обычно используемой системы СГС. Тогда уравнения Максвелла имеют вид [37]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}),\end{aligned}\tag{43}$$

что подразумевает, что электрическое и магнитное поля (\mathbf{E} и \mathbf{H}) удовлетворяют однородному векторному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,\tag{44}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,\tag{45}$$

где $k \stackrel{\text{def}}{=} \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ — волновое число, и эти два уравнения эквивалентны, поскольку $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$. Однако Ур. (45) [но не Ур. (44)] влечет $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ и, таким образом, само по себе эквивалентно Ур. (43). Здесь и далее мы приводим выражения в основном для $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, так как оно однозначно определяет $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ через Ур. (43). Мы также опускаем для краткости общую зависимость полей, потенциалов и т. д. от \mathbf{r} . Мы рассматриваем

произвольные k , в том числе комплексные. Сильно поглощающая внешняя среда означает, что поля затухают на малом расстоянии, что несовместимо с источниками поля, расположенными далеко от рассеивающей частицы. Однако, слабо поглощающая среда (относительно малая мнимая часть k) совместима с такой задачей рассеяния. Практические аспекты генерации бесселевых пучков в такой среде выходят за рамки данной работы.

Для описания различных типов бесселевых пучков удобно использовать векторные потенциалы Герца [10]. Они связаны с более популярными скалярным и векторным потенциалами (ϕ, \mathbf{A}) , которые определяют электромагнитное поле как:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + i\omega\mathbf{A}, \quad (46)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}. \quad (47)$$

Электрический $\mathbf{\Pi}_e$ и магнитный $\mathbf{\Pi}_m$ векторные потенциалы вводятся следующим образом [43]:

$$\mathbf{A} = -ik^2\omega^{-1}\mathbf{\Pi}_e + \mu\nabla \times \mathbf{\Pi}_m, \quad (48)$$

$$\phi = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e, \quad (49)$$

что подразумевает Лоренцевскую калибровку для ϕ и \mathbf{A} и то, что эти потенциалы удовлетворяют скалярному и векторному уравнениям Гельмгольца соответственно [Ур. (44)]. Заметим, однако, что это калибровочное условие однозначно определяет потенциалы только в том случае, если дополнительно требуется, чтобы они достаточно быстро затухали на бесконечности [44]. В рассмотренном здесь случае без источников это означало бы обращение в ноль как потенциалов, так и полей во всем пространстве. Из Ур. (46)–(49) вытекают следующие выражения для полей:

$$\mathbf{E} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e + k^2\mathbf{\Pi}_e + ik\eta\nabla \times \mathbf{\Pi}_m, \quad (50)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}_m - ik\eta^{-1}\mathbf{\Pi}_e), \quad (51)$$

что оставляет большую свободу выбора $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ для заданных полей. Первое ограничение, которое мы постулируем, заключается в том, что и $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ удовлетворяют векторному уравнению Гельмгольца [Ур. (44)] [44]. Это позволяет нам переписать Ур. (50) в форме, аналогичной Ур. (51)

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}_e + ik\eta\mathbf{\Pi}_m). \quad (52)$$

И наоборот, любые $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ — решения Ур. (44) — при подстановке в Ур. (50), (51) приводят к тому, что \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют Ур. (43).

Кратко упомянем остальные степени свободы, которые мы не фиксируем. Во-первых, для любой функции g , удовлетворяющей скалярному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 g + k^2 g = 0, \quad (53)$$

$\mathbf{\Pi}_e$ (или $\mathbf{\Pi}_m$) можно увеличить на ∇g без изменения полей, но уменьшить $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e$ (или $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m$) на $k^2 g$. Такое изменение $\mathbf{\Pi}_e$ (но не $\mathbf{\Pi}_m$) также изменяет ϕ и \mathbf{A} без нарушения калибровки Лоренца. Другими словами, только роторы этих векторных потенциалов определяют поля. Во-вторых, на поля не влияет одновременное увеличение $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ любыми вспомогательными полями \mathbf{E}' и \mathbf{H}' , соответственно, если эти поля удовлетворяют Ур. (43). Комбинируя вышеуказанные параметры, либо $\mathbf{\Pi}_e$, либо $\mathbf{\Pi}_m$ можно установить равным нулю — тогда другой будет равен соответствующему (электрическому или магнитному) полю, деленному на k^2 .

Для бесселевых пучков, распространяющихся вдоль оси z , и $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ имеют следующий простой функциональный вид в цилиндрической системе координат [11]

$$f_n(\mathbf{r}) = J_n(k_t \rho) e^{in\varphi} e^{ik_z z}, \quad (54)$$

где J_n — функция Бесселя первого рода (n — порядок бесселева пучка), $k_t \stackrel{\text{def}}{=} k \sin \alpha_0$ и $k_z \stackrel{\text{def}}{=} k \cos \alpha_0$ — поперечная и продольная компоненты волнового вектора k , соответственно, а α_0 — угол аксикона (Рис. 6). В более общем смысле k_t и k_z могут быть произвольными комплексными

значениями с единственным ограничением $k_t^2 + k_z^2 = k^2$, но в большинстве приложений рассматриваются вещественные углы α_0 , т. е. отношения любых двух из этих волновых чисел являются вещественные.

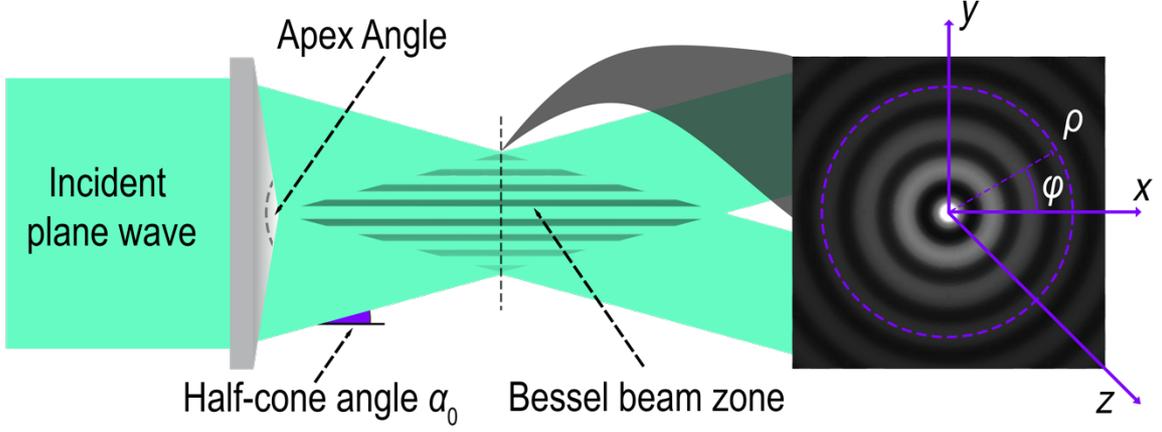


Рис. 6. Геометрия формирования бesselева пучка с помощью аксикона (конической линзы). В пределе $\alpha_0 \rightarrow 0$ пучок представляет собой плоскую волну [45].

Некоторые исследователи [26,32,46] вводят дополнительный множитель i^n в определение f_n [Ур. (54)], что влияет на постоянные множители во всех дальнейших соотношениях, где присутствуют несколько порядков f_n (или соответствующих потенциалов или полей). В этой работе рассматриваются только целые значения n , так как в противном случае f_n имеет разрывы по φ . Важно отметить, что f_n является решением Ур. (53) таким образом, любая линейная суперпозиция f_n с постоянными векторами (и потенциально разными n и α_0) удовлетворяет Ур. (44) и соответствует либо \mathbf{P}_e , либо \mathbf{P}_m .

Прежде чем продолжить, введем удобное обозначение $\mathbf{e}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y$ (где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные векторы вдоль соответствующих осей), обладающее следующими свойствами

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\pm \times \mathbf{e}_z &= \pm i\mathbf{e}_\pm, & \mathbf{e}_\mp \times \mathbf{e}_\pm &= \pm 2i\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\pm \times \mathbf{e}_\pm &= \mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\pm = 0, & \mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\mp &= 2. \end{aligned} \quad (55)$$

Обратите внимание, что мы определяем (билинейное) скалярное произведение без сопряжения второго аргумента как совместимое с обозначением дивергенции, т. е. это не настоящее скалярное произведение двух комплексных векторов. Последнее можно получить с помощью тривиального соотношения $\mathbf{e}_{\pm}^* = \mathbf{e}_{\mp}$, где $*$ обозначает комплексно-сопряженное число. Подобные круговые единичные векторы распространены, например, в описании векторных сферических гармоник, например, в [11], но здесь мы оставляем их не нормированными (на $\sqrt{2}$) для упрощения дальнейших выражений. Далее элементарное исчисление с рекуррентными соотношениями для функций Бесселя приводит к следующим тождествам:

$$\nabla f_n = ik_z f_n \mathbf{e}_z + \frac{k_t}{2} (f_{n-1} \mathbf{e}_+ - f_{n+1} \mathbf{e}_-), \quad (56)$$

$$\nabla \times (f_n \mathbf{e}_z) = \frac{ik_t}{2} (f_{n-1} \mathbf{e}_+ + f_{n+1} \mathbf{e}_-), \quad (57)$$

$$\nabla \times (f_n \mathbf{e}_{\pm}) = \pm k_z f_n \mathbf{e}_{\pm} - ik_t f_{n\pm 1} \mathbf{e}_z,$$

$$\nabla \cdot (f_n \mathbf{e}_z) = ik_z f_n, \quad \nabla \cdot (f_n \mathbf{e}_{\pm}) = \mp k_t f_{n\pm 1}, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times (f_n \mathbf{e}_z) &= ik_z \nabla f_n + k^2 f_n \mathbf{e}_z \\ &= k_t^2 f_n \mathbf{e}_z + i \frac{k_z k_t}{2} (f_{n-1} \mathbf{e}_+ - f_{n+1} \mathbf{e}_-), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times (f_n \mathbf{e}_{\pm}) &= \mp k_t \nabla f_{n\pm 1} + k^2 f_n \mathbf{e}_{\pm} \\ &= \frac{k^2 + k_z^2}{2} f_n \mathbf{e}_{\pm} \mp ik_z k_t f_{n\pm 1} \mathbf{e}_z + \frac{k_t^2}{2} f_{n\pm 2} \mathbf{e}_{\mp}. \end{aligned} \quad (60)$$

В литературе не встречалось явное обсуждении этих соотношений, однако они делают большинство следующих выражений и выводов существенно более краткими. Обратите внимание, что роторы и двойные роторы в Ур. (57), (59), (60) бездивергентны и служат строительными блоками для полей, обусловленных Ур. (50), (51) как показано в следующем разделе. Однако не все они линейно независимы, если несколько порядков

n рассматривать вместе (см. раздел 2.2.1). В частности, $\nabla \times (f_n \mathbf{e}_z)$ и $\nabla \times \nabla \times (f_n \mathbf{e}_z)$ — цилиндрические векторные волновые функции (ЦВВФ), которые, как известно, представляют собой полный базис для разложения электромагнитного поля в свободном пространстве [47,48].

2.1.4.2. Известные типы бесселевых пучков

Варьируя направление векторных потенциалов Герца, мы получаем различные типы пучков [10], которые в литературе иногда называют дэвисовыми бесселевыми пучками (Davis Bessel beams) [12]. Следующие выражения поля могут быть легко получены с помощью Ур. (55)–(60).

ТЕ и ТМ (поперечные электрические и магнитные) бесселевы пучки получаются из $\mathbf{\Pi}_m = \eta^{-1} \Pi_0 f_n \mathbf{e}_z$, $\mathbf{\Pi}_e = 0$ и $\mathbf{\Pi}_e = \Pi_0 f_n \mathbf{e}_z$, $\mathbf{\Pi}_m = 0$ соответственно. Обозначим соответствующие поля \mathbf{E}_{TE} и \mathbf{H}_{TM} , соответственно; они имеют нулевые z -компоненты. Сопутствующие поля \mathbf{H}_{TE} и \mathbf{E}_{TM} обычно не имеют нулевых компонент. Амплитуды (коэффициенты масштабирования) для $\mathbf{\Pi}_e$ связаны с амплитудами электрического поля как $\Pi_0 = E_0/k^2$. Здесь и далее для упрощения мы опускаем индекс n для полей и потенциалов, если только в одном уравнении не встречаются разные порядки. Электрические поля ТЕ и ТМ пучков следующие:

$$E_{TE,x} = -\frac{E_0 k_t}{2k} (f_{n-1} + f_{n+1}), \quad E_{TE,y} = i \frac{E_0 k_t}{2k} (f_{n+1} - f_{n-1}), \quad (61)$$

$$E_{TE,z} = 0,$$

$$E_{TM,x} = i \frac{E_0 k_t k_z}{2k^2} (f_{n-1} - f_{n+1}),$$

$$E_{TM,y} = -\frac{E_0 k_t k_z}{2k^2} (f_{n-1} + f_{n+1}), \quad (62)$$

$$E_{TM,z} = \frac{E_0 k_t^2}{k^2} f_n.$$

Профили величины электрического поля и усредненного по времени вектора Пойнтинга (как отдельных компонент, так и полной величины вектора), а также профили осредненной по времени плотности энергии ТЕ- и ТМ-пучков представлены на Рис. 7 и Рис. 8. Обратите внимание, что эти пучки имеют идентичные векторы Пойнтинга и плотности энергии из-за преобразования дуальности (или двойственности, см. раздел 2.2.1).

Математически эти бesselевы пучки являются наиболее фундаментальными, так как они прямо пропорциональны цилиндрическим векторным волновым функциям. Они очень удобны в задачах отражения и пропускания [49]. Причем такие лучи нулевого порядка связаны с азимутальной и радиальной поляризациями бesselева пучка [10].

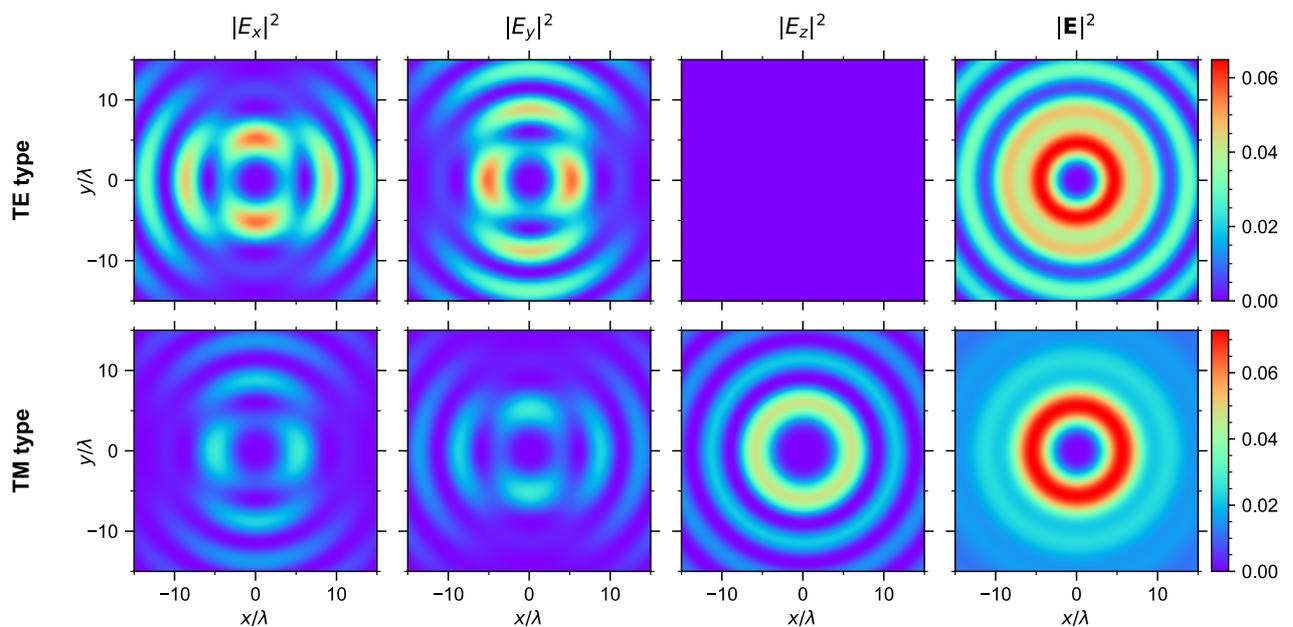


Рис. 7. Профили интенсивности компонент \mathbf{E}_{TE} и \mathbf{E}_{TM} при $n = 2$, $\alpha_0 = 45^\circ$ в плоскости xu . Амплитуда E_0 и волновое число k равны 1, z -компонента \mathbf{E}_{TE} тождественно равна нулю [см. Ур. (61)].

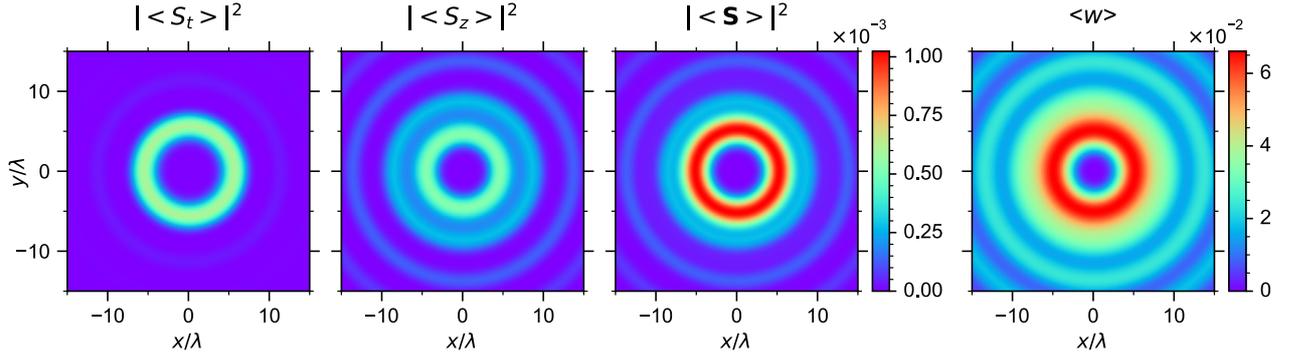


Рис. 8. Профили величины компонент вектора Пойнтинга и плотности энергии для \mathbf{E}_{TE} или \mathbf{E}_{TM} с теми же параметрами, что и на Рис. 7.

Бесселевы пучки с линейно поляризованными электрическим и магнитным полями (LE и LM соответственно) получаются из $\mathbf{\Pi}_m = \eta^{-1} \Pi_0 f_n \mathbf{e}_t$, $\mathbf{\Pi}_e = 0$ и $\mathbf{\Pi}_e = \Pi_0 f_n \mathbf{e}_t$, $\mathbf{\Pi}_m = 0$, соответственно. Здесь \mathbf{e}_t — вектор поперечной поляризации, перпендикулярный \mathbf{e}_z . Когда он равен $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{x,y}$ (например, \mathbf{e}_y или $-\mathbf{e}_x$), это приводит к так называемым x - или y -линейным поляризациям соответствующих полей, которые обозначаются как $\mathbf{E}_m^{(x)}$, $\mathbf{E}_m^{(y)}$ и $\mathbf{H}_e^{(x)}$, $\mathbf{H}_e^{(y)}$ для полей LE и LM в литературе. Здесь нижние индексы m и e соответствуют типу ненулевого векторного потенциала Герца, а верхние индексы (x) , (y) , обозначающие поляризацию, не следует путать с нижними индексами x , y , z , обозначающими компоненты вектора. Однако мы предпочитаем использовать нижние индексы LE и LM в выражениях поля, чтобы сохранить единообразное обозначение для всех типов бесселевых пучков. Более того, наше определение (y) -поляризации ($\mathbf{e}_t = -\mathbf{e}_x$) соответствует линейной y -поляризации плоской волны в пределе $\alpha_0 = 0^\circ$ и $n = 0$ (см. раздел 2.2.1) но имеет знак, обратный тому, что в [11]. Результирующие электрические поля для x -поляризованных бесселевых пучков LE и LM следующие:

$$E_{LE,x}^{(x)} = \frac{E_0 k_z}{k} f_n, \quad E_{LE,y}^{(x)} = 0, \quad E_{LE,z}^{(x)} = i \frac{E_0 k_t}{2k} (f_{n-1} - f_{n+1}), \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
E_{LM,x}^{(x)} &= i \frac{E_0 k_t^2}{4k^2} (f_{n-2} - f_{n+2}), \\
E_{LM,y}^{(x)} &= \frac{E_0}{k^2} \left[\frac{k^2 + k_z^2}{2} f_n - \frac{k_t^2}{4} (f_{n-2} + f_{n+2}) \right], \\
E_{LM,z}^{(x)} &= -\frac{E_0 k_t k_z}{2k^2} (f_{n-1} + f_{n+1}).
\end{aligned} \tag{64}$$

Профили величины электрического поля, вектора Пойнтинга и плотности энергии типов LE и LM представлены на Рис. 9 и Рис. 10. Обратите внимание, что эти поля всегда имеют ненулевые продольные компоненты, однако электрическое (для LE типа) или магнитное (для LM типа) поле имеет нулевую компоненту вдоль \mathbf{e}_t . Сопутствующие магнитные поля $\mathbf{H}_{LE}^{(x)}$, $\mathbf{H}_{LE}^{(y)}$ и электрические поля $\mathbf{E}_{LM}^{(x)}$, $\mathbf{E}_{LM}^{(y)}$ вообще не имеют нулевых компонент.

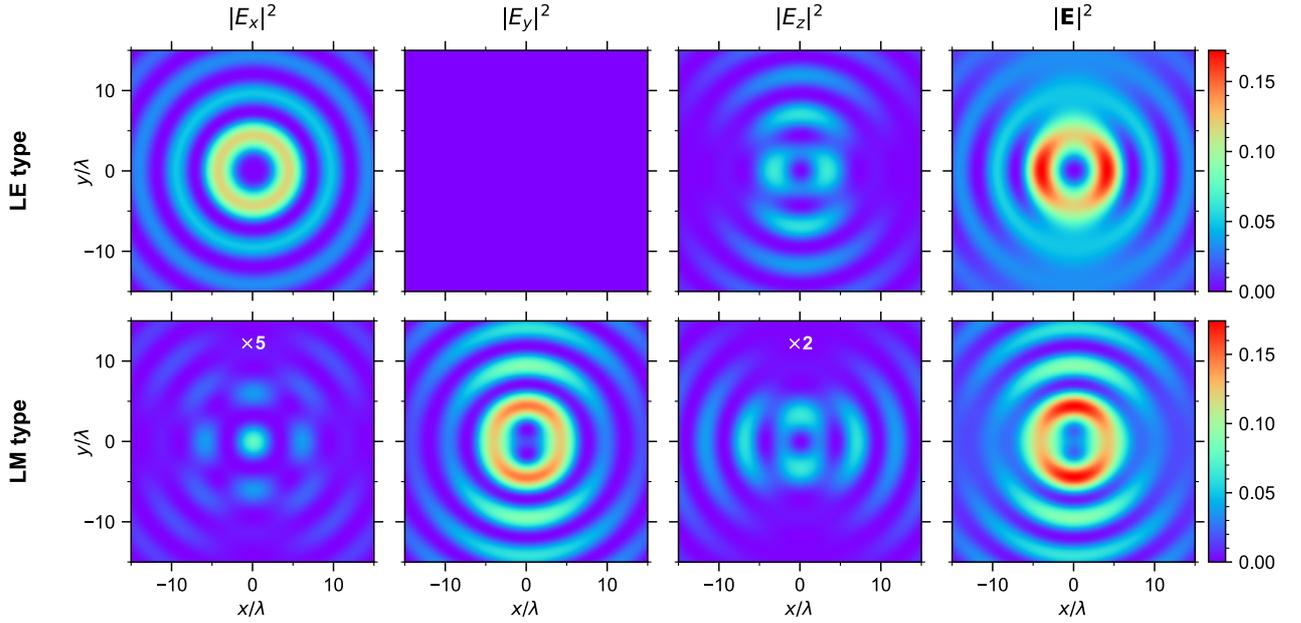


Рис. 9. Профили интенсивности компонент $\mathbf{E}_{LE}^{(x)}$ и $\mathbf{E}_{LM}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на Рис. 7. Компоненты $|E_x|^2$ и $|E_z|^2$ LM типа масштабированы для наглядности, y -компонента $\mathbf{E}_{LE}^{(x)}$ тождественно равна нулю [см. Ур. (63)].

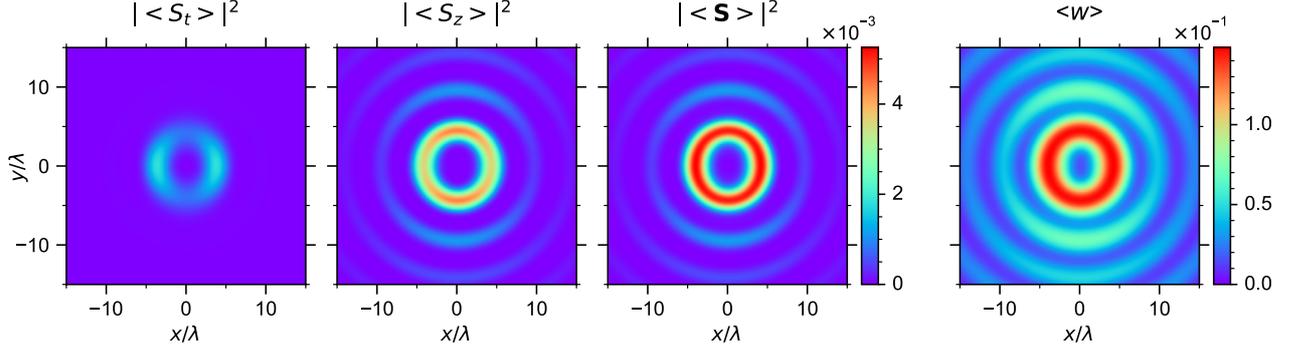


Рис. 10. Профили величины компонент вектора Пойнтинга и плотности энергии для

$\mathbf{E}_{LE}^{(x)}$ и $\mathbf{E}_{LM}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на Рис. 7.

Симметрично-круговой (CS) тип бesselева пучка определяется как $\mathbf{\Pi}_m = \eta^{-1}\Pi_0 f_n \mathbf{e}_y/2$, $\mathbf{\Pi}_e = \Pi_0 f_n \mathbf{e}_x/2$ и $\mathbf{\Pi}_m = -\eta^{-1}\Pi_0 f_n \mathbf{e}_x/2$, $\mathbf{\Pi}_e = \Pi_0 f_n \mathbf{e}_y/2$, что приводит к двум поляризациям $\mathbf{E}_{CS}^{(1,0)}$ и $\mathbf{E}_{CS}^{(0,1)}$ (индекс CS обычно опускается в литературе) с циркулярно-симметричной величиной вектора Пойнтинга. Чтобы сделать обозначения различных бesselевых пучков более единообразными, введем эквивалентные определения $\mathbf{E}_{CS}^{(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}_{CS}^{(1,0)}$, $\mathbf{E}_{CS}^{(y)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}_{CS}^{(0,1)}$, которые дополнительно обосновываются в разделе 2.2.1. Этот тип пучка также может был описан через угловое спектральное разложение [11]. Электрическое поле пучка CS имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_{CS,x}^{(x)} &= \frac{E_0}{4k^2} \left[(k + k_z)^2 f_n + \frac{k_t^2}{2} (f_{n-2} + f_{n+2}) \right], \\
 E_{CS,y}^{(x)} &= i \frac{E_0 k_t^2}{8k^2} (f_{n-2} - f_{n+2}), \\
 E_{CS,z}^{(x)} &= i \frac{E_0 k_t (k_z + k)}{4k^2} (f_{n-1} - f_{n+1}).
 \end{aligned} \tag{65}$$

Профили величины электрического поля, вектора Пойнтинга и плотности энергии пучка CS представлены на Рис. 11 и Рис. 12.

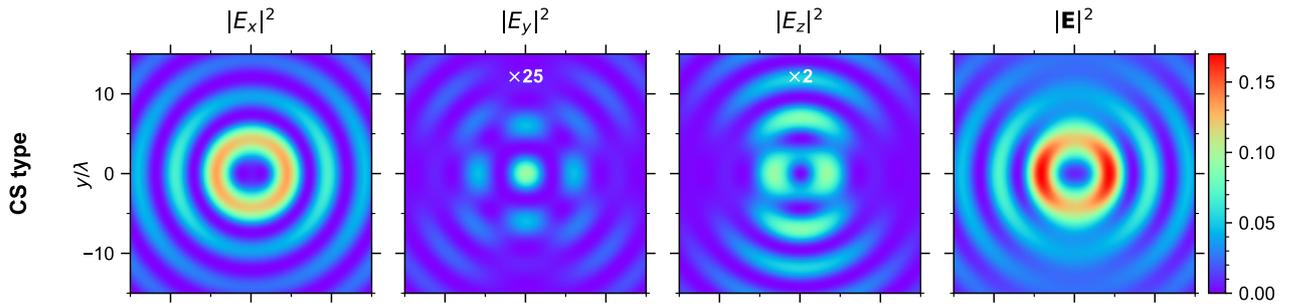


Рис. 11. Профили интенсивности компонент $\mathbf{E}_{CS}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на

Рис. 7. Компоненты $|E_y|^2$ и $|E_z|^2$ масштабированы для наглядности.

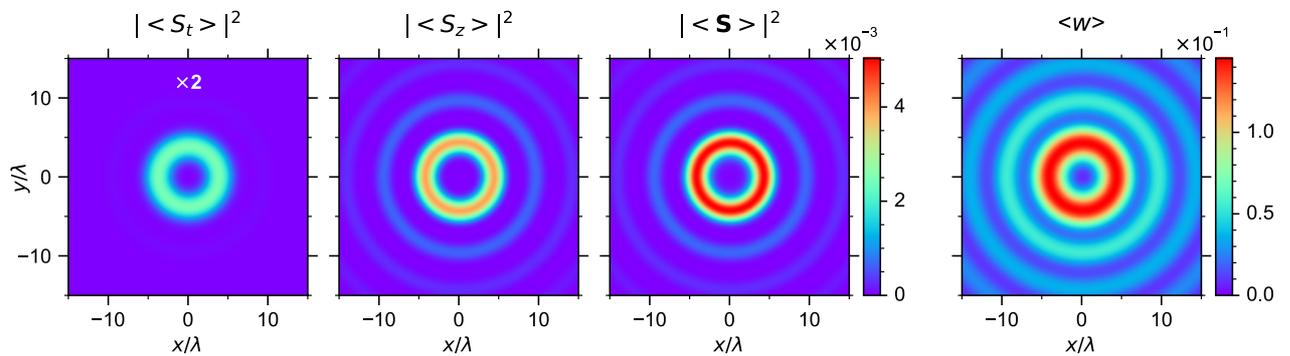


Рис. 12. Профили модулей компонент вектора Пойнтинга и плотности энергии для $\mathbf{E}_{CS}^{(x)}$

с теми же параметрами, что и на Рис. 7. Компонента $|\langle S_t \rangle|^2$ масштабирована для

наглядности.

2.1.5. Разложение бesselевых пучков на плоские волны

Наиболее простым способом реализации рассеяния бesselевых пучков является представление их в виде суперпозиции плоских волн, для которых уже просто получить выражения для отраженного и преломленного поля. Более того, имея такое разложение для бesselевых пучков, можно воспользоваться готовой реализацией рассеяния плоских волн вблизи плоской подложки в программном пакете ADDA [34].

Разложение бesselева пучка на взвешенную сумму плоских волн известно в литературе и описывается методом углового спектрального разложения (angular spectrum decomposition — ASD) [11]. В общем случае,

электрическое поле с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ может быть представлено следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = \int_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} \int_{\beta=0}^{2\pi} \mathbf{E}_{\text{pw}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin \alpha \alpha d\beta, \quad (66)$$

где $\mathbf{k} = (k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k \cos \alpha)$ это волновой вектор а α и β обозначают полярный и азимутальный углы волнового вектора, соответственно ($\alpha_{\max} < \pi/2$). Угловая спектральная функция \mathbf{E}_{pw} выражается как

$$\mathbf{E}_{\text{pw}} = \mathbf{Q}\mathcal{P}(\alpha, \beta), \quad (67)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} p_x(\cos \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - p_y(1 - \cos \alpha) \sin \beta \cos \beta \\ p_y(\cos \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - p_x(1 - \cos \alpha) \sin \beta \cos \beta \\ -p_x \sin \alpha \cos \beta - p_y \sin \alpha \sin \beta \end{cases}, \quad (68)$$

где p_x, p_y это комплексные поляризационные параметры, которые определяют характер поляризации результирующего поля [19].

В случае же, когда представляемым полем является поле бesselева пучка, разложение сильно упрощается, так как функция $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ ограничена единственным значением $\alpha = \alpha_0$ — коническим углом, что соответствует физическому описанию бesselева пучка, полученного путем пропускания плоской волны через коническую линзу — аксикон (Рис. 13) [5].

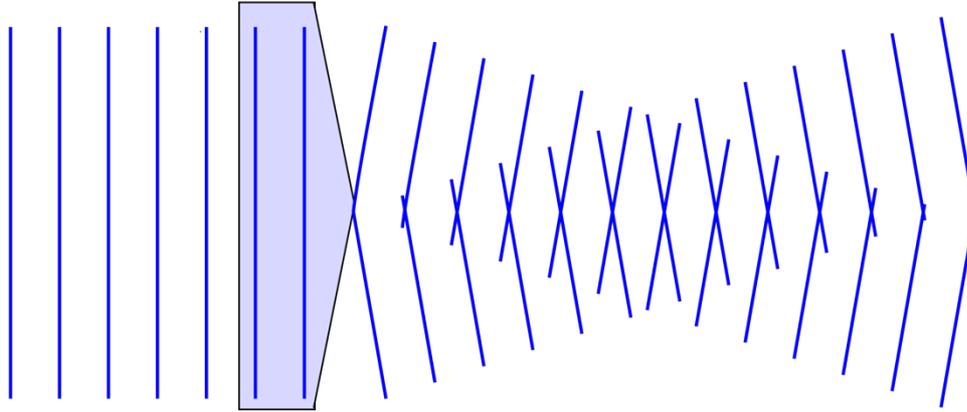


Рис. 13. Схема аксикона и результирующего бesselева пучка.¹

Ур. (66) для электрического поля бesselева пучка порядка l имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = \int_{\beta=0}^{2\pi} E_{\text{pw}0}(\alpha_0, \beta) \mathbf{Q}|_{\alpha=\alpha_0} e^{-i l \beta} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\beta, \quad (69)$$

где $E_{\text{pw}0}(\alpha_0, \beta)$ это амплитуда электрического поля плоских волн, распространяющихся с коническим углом α_0 и азимутальным углом β [19].

Для симметричного падающего поля (нет зависимости от угла β) $E_{\text{pw}0}(\alpha_0, \beta) = E_{\text{pw}0}$ [11].

Изменяя поляризационные параметры (p_x, p_y) и подставляя их в Ур. (68) и (69), можно получить выражения для электромагнитного поля различных типов бesselевых пучков. Так, поляризационные параметры $(1,0)$ и $(0,1)$ соответствуют x - и y -поляризациям CS типа бesselева пучка. Поляризационные параметры $(\cos \beta, \sin \beta)$ и $(-\sin \beta, \cos \beta)$ соответствуют ТМ и ТЕ типам бesselева пучка (также известных как азимутальная и радиальная поляризации при $l = 0$) [19].

Несмотря на то, что выражения для разложения известны для CS, ТЕ и ТМ типов, выражения для остальных типов не были описаны в литературе.

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_beam#/media/File:Bessel_beam.svg

Вывод разложения (произвольного) обобщенного бесселева пучка по плоским волнам приводится в следующем разделе.

2.2. Теоретическая часть

2.2.1. Обобщение бесселевых пучков

В данной главе проводится теоретическая работа по классификации и обобщению бесселевых пучков. Это необходимо для получения выражений, которые способствуют наиболее эффективной реализации в коде ADDA всех возможных типов бесселевых пучков. Конечная цель – вывод уравнений для электрического поля обобщенного бесселева пучка, через который можно удобно задать произвольный тип через коэффициенты разложения по базису бесселевых пучков.

2.2.1.1. Матрица векторных потенциалов Герца

Сначала введем несколько удобных определений. Уравнения Максвелла (43) инвариантны по отношению к преобразованию дуальности или, в более общем виде, к дуальному повороту, выражаемому как [50,51]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}_\chi \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_\chi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \chi & -\eta \sin \chi \\ \eta^{-1} \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \quad (70)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{R}_\chi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix},$$

где \mathbf{R}_χ это стандартная матрица поворота на угол χ (может быть комплексным) размерности 2×2 :

$$\mathbf{R}_\chi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (71)$$

которое эффективно применяется к паре $(\mathbf{E}, \eta \mathbf{H})$. Определим также $\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\pi/2}$ для краткости. Стандартное преобразование дуальности соответствуют $\mathbf{P}_{\pm\pi/2}$. Инвариантность относительно дуальности тривиально следует из представления Ур. (43) как

$$(ik\mathbf{P}_{\pi/2} + \nabla \times) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

учитывая, что преобразование \mathbf{P}_χ (или \mathbf{R}_χ) для любого комплексного χ коммутирует друг с другом.

Тот же процесс можно применить к паре векторных потенциалов Герца. Для этого запишем Ур. (50), (51) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_e \\ \mathbf{\Pi}_m \end{pmatrix}, \quad (73)$$

где \mathcal{L} это матричный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \begin{pmatrix} \nabla \times & ik\eta \\ -ik\eta^{-1} & \nabla \times \end{pmatrix} = \nabla \times (-ik\mathbf{P}_{\pi/2} + \nabla \times), \quad (74)$$

а векторные операции (такие как ротор), очевидно, коммутируют с линейными суперпозициями (такими как дуальный поворот). Из этого разложения \mathcal{L} следует, что оно коммутирует с \mathbf{P}_χ , т. е. $\mathcal{L}\mathbf{P}_\chi = \mathbf{P}_\chi\mathcal{L}$, что вместе с Ур. (73) означает, что Ур. (70) верно и для пары $(\mathbf{\Pi}_e, \mathbf{\Pi}_m)$. Объединяя Ур. (72)–(74), получаем

$$\nabla \times (\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_e \\ \mathbf{\Pi}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (75)$$

т. е. выполнение уравнения Гельмгольца для $\mathbf{\Pi}_e$ и $\mathbf{\Pi}_m$ является достаточным, но не необходимым условием (оно необходимо только для их роторов). Это объясняет, почему первое было постулировано в разделе 2.1.4.1.

Как линейные (LE и LM), так и симметрично-круговые (CS) типы бесселевых пучков соответствуют поперечным потенциалам Герца, т. е. ограниченной плоскостью xu . Естественным обобщением этих случаев является определение через произвольную комплексную матрицу \mathbf{M} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_e \\ \mathbf{\Pi}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{e,x} & \Pi_{e,y} \\ \Pi_{m,x} & \Pi_{m,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \Pi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} f_n. \quad (76)$$

Как обсуждалось в разделе 2.1.4.1, любая такая линейная комбинация приводит к тому, что потенциалы Герца автоматически удовлетворяют

уравнению Гельмгольца и, следовательно, результирующие поля удовлетворяют уравнениям Максвелла. Другое удобное свойство этой матрицы состоит в том, что преобразование дуальности потенциалов Герца \mathbf{P}_χ эквивалентно $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}_\chi \mathbf{M}$, а поворот в плоскости xu на угол ψ (поворот поляризации поля) – $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}\mathbf{R}_{-\psi}$ (подробнее описано в следующем разделе)

Хотя матрица \mathbf{M} очень проста для большинства существующих типов бесселевых пучков (см. раздел 2.2.1.4), выражения для компонент поля, полученные с использованием Ур. (56)–(60), проще с использованием матрицы \mathbf{M}' , соответствующей базисным векторам \mathbf{e}_\pm :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \mathbf{M}' \begin{pmatrix} \mathbf{e}_+ \\ \mathbf{e}_- \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}'\mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{M}' = \mathbf{M}\mathbf{W}^{-1}, \quad (77)$$

где \mathbf{W} матрица преобразования базиса:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Чтобы избежать путаницы, мы будем использовать разные нижние индексы для обозначения компонент этих матриц, но опускаем штрихи для компонент матрицы \mathbf{M}' :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{e,x} & M_{e,y} \\ M_{m,x} & M_{m,y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}' = \begin{pmatrix} M_{e,+} & M_{e,-} \\ M_{m,+} & M_{m,-} \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Выражения для электрического поля \mathbf{E} обобщенного бесселева пучка в базисе $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\pm$ получены с помощью Ур. (57), (60), (73)–(77):

$$E_\pm = \Pi_0 \left[\left(\frac{k^2 + k_z^2}{2} M_{e,\pm} \pm ikk_z M_{m,\pm} \right) f_n + \frac{k_t^2}{2} M_{e,\mp} f_{n\mp 2} \right], \quad (80)$$

$$E_z = \Pi_0 k_t [(ik_z M_{e,-} + k M_{m,-}) f_{n-1} - (ik_z M_{e,+} - k M_{m,+}) f_{n+1}],$$

что может быть записано в декартовом базисе как:

$$\begin{aligned}
E_x &= \Pi_0 \left\{ \left(\frac{k^2 + k_z^2}{2} M_{e,x} + k k_z M_{m,y} \right) f_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_t^2}{4} [(M_{e,x} + iM_{e,y})f_{n-2} + (M_{e,x} - iM_{e,y})f_{n+2}] \right\}, \\
E_y &= \Pi_0 \left\{ \left(\frac{k^2 + k_z^2}{2} M_{e,y} - k k_z M_{m,x} \right) f_n \right. \\
&\quad \left. + i \frac{k_t^2}{4} [(M_{e,x} + iM_{e,y})f_{n-2} - (M_{e,x} - iM_{e,y})f_{n+2}] \right\}, \\
E_z &= \frac{\Pi_0 k_t}{2} \{ [i k_z (M_{e,x} + iM_{e,y}) + k (M_{m,x} + iM_{m,y})] f_{n-1} \\
&\quad - [i k_z (M_{e,x} - iM_{e,y}) - k (M_{m,x} - iM_{m,y})] f_{n+1} \}.
\end{aligned} \tag{81}$$

Выражения для бесселевых пучков с линейной и симметрично-круговой поляризацией (LE, LM и CS) в разделе 2.1.4.2 являются частными случаями Ур. (81).

2.2.1.2. Поворот поляризации бесселевых пучков

Большинство программ для моделирования светорассеяния адаптированы для расчета матриц Мюллера (или амплитуды) рассеяния, что требует расчетов для двух поляризаций (обычно линейных) падающего поля [18]. Эти поляризации должны быть связаны поворотом на $\pi/2$, чтобы получить соотношения для поворота матриц рассеяния. В случае бесселевых пучков (любого типа) нашей целью также является определить две такие базисные поляризации:

$$\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r}) \propto \mathcal{R}_{\pi/2} \mathbf{E}^{\perp}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{R}}_{\pi/2} \mathbf{E}^{\perp}(\tilde{\mathbf{R}}_{-\pi/2} \mathbf{r}), \tag{82}$$

где \mathcal{R}_{ψ} — оператор поворота (действующий на поле), а $\tilde{\mathbf{R}}_{\psi}$ — матрица поворота размерности 3×3 (действующая на вектор) на угол χ вокруг оси распространения пучка (положительное значение — по часовой стрелке если смотреть вдоль этого направления). Для стандартного распространения вдоль оси z (как рассматривается в данной работе) $\tilde{\mathbf{R}}_{\psi}$

является в точности двумерной матрицей поворота \mathbf{R}_ψ , с дополнительной единицей в элементе матрицы (3,3). Параллельная и перпендикулярная поляризации рассматриваются относительно плоскости рассеяния, как это обычно используется для матриц рассеяния [18]. Для плоской волны поворот \mathbf{r} в Ур. (82) избыточен, и пропорциональность можно заменить равенством. Напротив, бесселев пучок обычно представляет собой вихревой пучок (т.е. его фаза зависит от азимутального угла φ), что приводит к дополнительному фазовому фактору, обсуждаемому ниже.

Используя определения из раздела 2.2.1.1 [Ур. (73), (76)] мы можем применить преобразование поворота к произвольному бесселевому пучку как для электрического, так и для магнитного полей:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\psi \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}_{-\psi} \mathbf{r}) \\ \tilde{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{R}}_{-\psi} \mathbf{r}) \end{pmatrix} \\ &= \Pi_0 \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{R}_{-\psi} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} f_n(\tilde{\mathbf{R}}_{-\psi} \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (83)$$

где мы использовали, что ротор и оператор поворота коммутируют, а поворот каждого элемента в строке эквивалентен умножению на $\tilde{\mathbf{R}}_\psi^T = \tilde{\mathbf{R}}_{-\psi}$ справа:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{-\psi} = \mathbf{R}_{-\psi} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Более того, поворот аргумента f_n тривиален:

$$f_n(\tilde{\mathbf{R}}_{-\psi} \mathbf{r}) = f_n(\rho, \varphi - \psi, z) = e^{-in\psi} f_n(\mathbf{r}), \quad (85)$$

что приводит к следующему общему соотношению:

$$\mathcal{R}_\psi \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \mathbf{M}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, e^{-in\psi} \mathbf{M} \mathbf{R}_{-\psi}). \quad (86)$$

Другими словами, поворот любого бесселева пучка эквивалентен преобразованию определяющей его матрицы \mathbf{M} . В частности, повороты на углы π и 2π особенно просты:

$$\mathcal{R}_\pi \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \mathbf{M}) = (-1)^{n+1} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \mathbf{M}), \quad \mathcal{R}_{2\pi} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \mathbf{M}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \mathbf{M}). \quad (87)$$

Здесь и далее в этом разделе мы обсуждаем только электрические поля, так как соответствующие выражения вращения для магнитных полей аналогичны. Основываясь на вышеизложенном, мы постулируем, что две ортогональные поляризации бесселевых пучков связаны соотношением [ср. Ур. (82)]

$$\mathcal{R}_{\pi/2} \mathbf{E}^\perp = i^{-n} \mathbf{E}^\parallel \Leftrightarrow \mathbf{M}_\perp = \mathbf{M}_\parallel \mathbf{R}, \quad (88)$$

т. е. их матрицы связаны простым поворотом без каких-либо дополнительных фазовых множителей. Отметим, что это определение соответствует существующим линейной и симметрично-круговой поляризациям бесселевых пучков, рассмотренных в разделе 2.1.4.2 (что соответствует вращению векторных потенциалов Герца). В частности, пара $\{\mathbf{E}^{(x)}, \mathbf{E}^{(y)}\}$ для любого из пучков LE, LM, CS и CS' может использоваться как пара $\{\mathbf{E}^\perp, \mathbf{E}^\parallel\}$, хотя их отношение к плоскости рассеяния (плоскость уз по умолчанию) не может быть описано простыми понятиями «перпендикулярно» или «параллельно», как для плоской волны.

2.2.1.3. Новые типы бесселевых пучков

В предыдущем разделе мы определили пары поляризаций для LE, LM и CS типов, необходимые для реализации в ADDA. Единственная отсутствующая составляющая — это поляризации для типов TE и TM, поскольку они почти осесимметричны и имеют тривиальные преобразования поворота (из-за их выражений через z -поляризованные векторные потенциалы Герца):

$$\mathcal{R}_\psi \mathbf{E}_{\text{TE, TM}, n} = e^{-in\psi} \mathbf{E}_{\text{TE, TM}, n}, \quad (89)$$

где мы явно указываем порядок бесселева пучка в качестве нижнего индекса, чтобы избежать путаницы. Введем компоненты x и y для этих пучков $(\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(x)}, \mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(y)}, \mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x)}, \mathbf{E}_{\text{TML}}^{(y)})$ через следующие соотношения:

$$\mathbf{E}_{\text{TE, TM}, n+1} = \mathbf{E}_{\text{TEL, TML}, n}^{(x)} + i \mathbf{E}_{\text{TEL, TML}, n}^{(y)}, \quad (90)$$

$$\mathcal{R}_{\pi/2} \mathbf{E}_{\text{TEL,TML},n}^{(x)} = i^{-n} \mathbf{E}_{\text{TEL,TML},n}^{(y)} \quad (91)$$

Этого недостаточно для однозначного определения новых типов пучков. Однако, если мы дополнительно потребуем, чтобы соответствующие матрицы \mathbf{M} были вещественных (для вещественных α_0), тогда единственное определение

$$\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(x),(y)} \stackrel{\text{def}}{=} k_t^{-1} \left(k_z \mathbf{E}_{\text{LE}}^{(x),(y)} \pm k \mathbf{E}_{\text{LM}}^{(y),(x)} \right), \quad (92)$$

$$\mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x),(y)} \stackrel{\text{def}}{=} k_t^{-1} \left(k_z \mathbf{E}_{\text{LM}}^{(x),(y)} \mp k \mathbf{E}_{\text{LE}}^{(y),(x)} \right), \quad (93)$$

где \pm соответствует x и y поляризациям в левой части. Для данных типов можно выписать еще одно интересное свойство, которое можно получить, переписав Ур. (90)

$$\mathbf{E}_{\text{TE},n\pm 1} = \mathbf{E}_{\text{TEL},n}^{(1,\pm i)}, \quad \mathbf{E}_{\text{TM},n\pm 1} = \mathbf{E}_{\text{TML},n}^{(1,\pm i)}. \quad (94)$$

Примеры соответствующих профилей амплитуд электрического поля, вектора Пойнтинга и плотности энергии для TEL и TML типов представлены на Рис. 14 и Рис. 15.

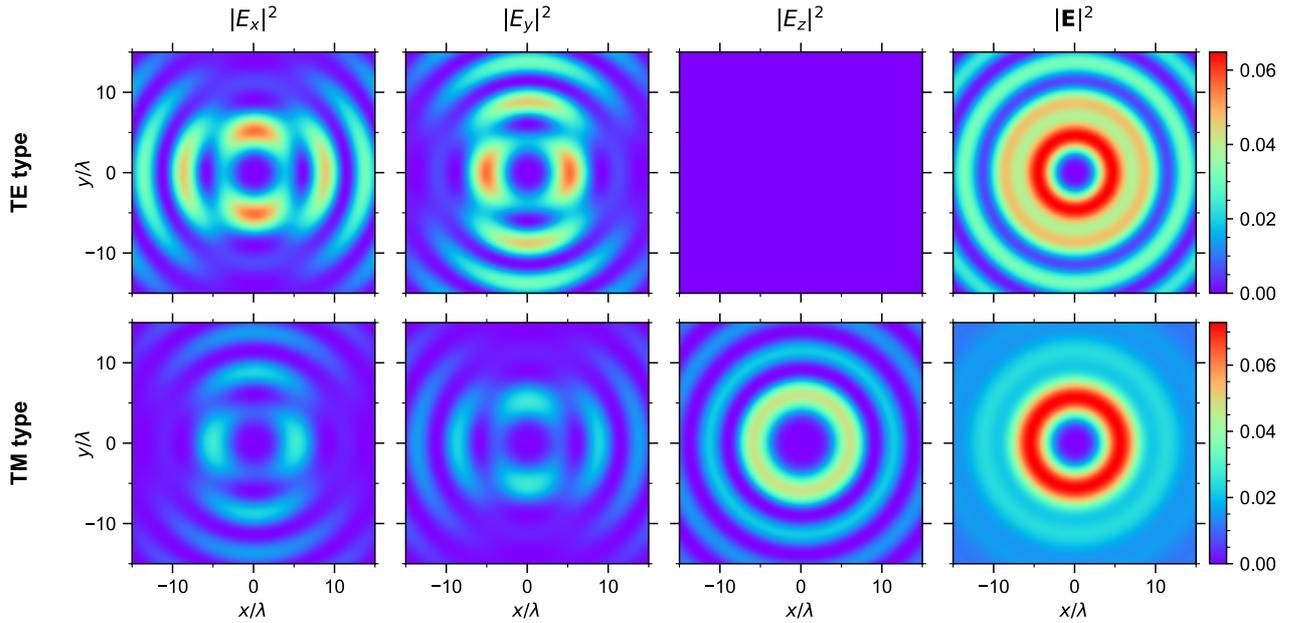


Рис. 14. Профили интенсивности компонент $\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(x)}$ и $\mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на Рис. 7. x -компонента $\mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x)}$ масштабирована для наглядности, в то время как z -компонента $\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(x)}$ равна нулю [см. Ур. (92)].

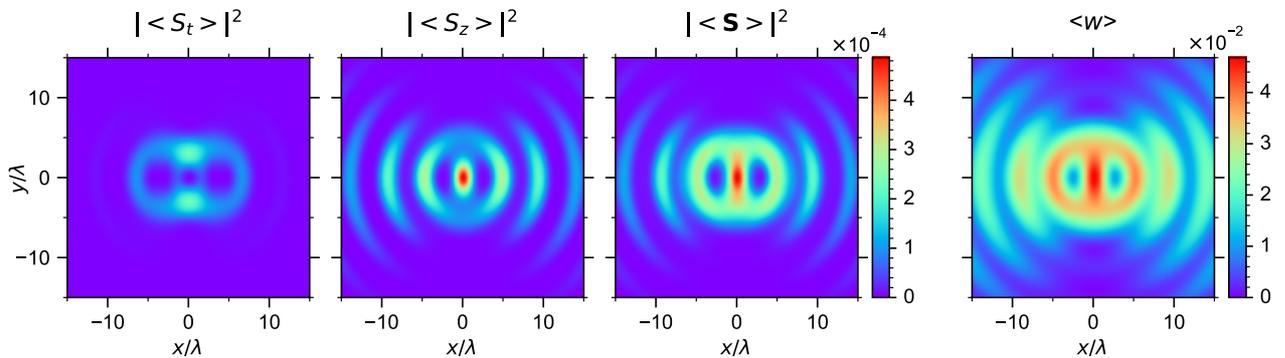


Рис. 15. Профили амплитуд компонент вектора Пойнтинга и плотности энергии либо для $\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(x)}$ либо для $\mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на Рис. 7.

Еще один новый тип бesselевых пучков можно определить, рассматривая векторные потенциалы в рамках матричного описания из раздела 2.2.1.1. Можно заметить, что выбор минуса в одном из выражений для $\mathbf{\Pi}_m$ в определении CS пучка в разделе 2.1.4.2 несколько произволен. Инверсией этого знака (для обеих поляризаций), т.е. $\mathbf{\Pi}_m = -\eta^{-1}\Pi_0 f_n \mathbf{e}_y/2$, $\mathbf{\Pi}_e = \Pi_0 f_n \mathbf{e}_x/2$, можно получить другой набор CS пучков—

далее мы будем обозначать их как CS' . Электрическое поле пучка CS' имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_{CS',x}^{(x)} &= \frac{E_0}{4k^2} \left[(k - k_z)^2 f_n + \frac{k_t^2}{2} (f_{n-2} + f_{n+2}) \right], \\
 E_{CS',y}^{(x)} &= i \frac{E_0 k_t^2}{8k^2} (f_{n-2} - f_{n+2}), \\
 E_{CS',z}^{(x)} &= i \frac{E_0 k_t (k_z - k)}{4k^2} (f_{n-1} - f_{n+1}).
 \end{aligned}
 \tag{95}$$

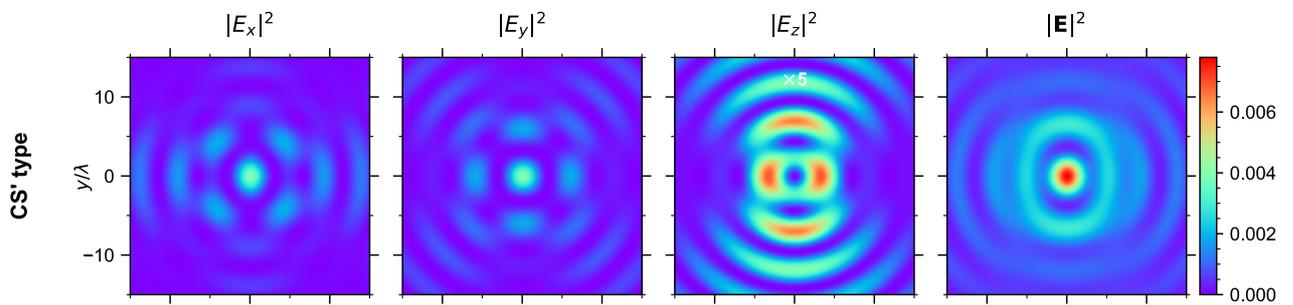


Рис. 16. Профили интенсивности компонент $\mathbf{E}_{CS'}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на Рис. 7. Некоторые компоненты масштабированы для наглядности.

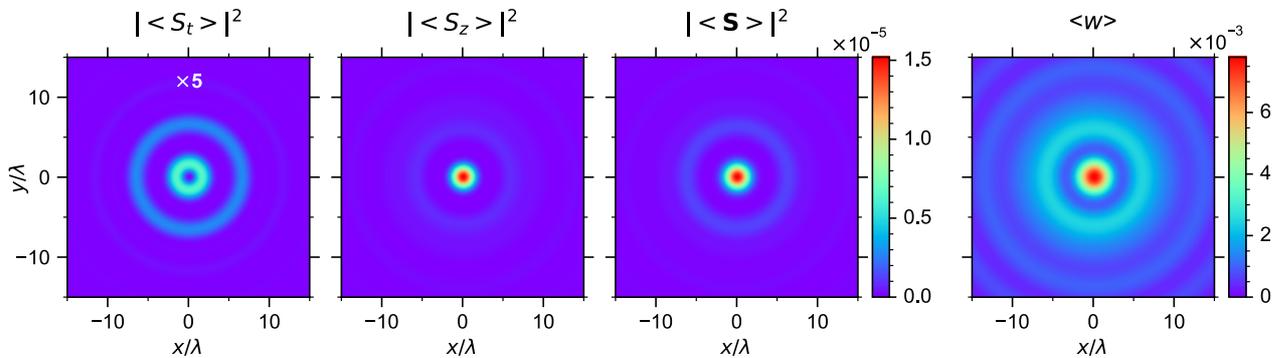


Рис. 17. Профили модулей компонент вектора Пойнтинга и плотности энергии для $\mathbf{E}_{CS'}^{(x)}$ с теми же параметрами, что и на Рис. 7. Некоторые компоненты масштабированы для наглядности.

Профили амплитуд электрического поля, вектора Пойнтинга и плотности энергии пучка CS' представлены на Рис. 16 и Рис. 17. Описание такого типа не встречалось в литературе, однако именно этот тип может играть важную

роль для построения базиса бесселевых пучков для эффективной реализации в программном коде, что будет описано далее.

2.2.1.4. Связь различных типов бесселевых пучков

Чтобы лучше понять взаимосвязь между старыми и новыми типами бесселевых пучков, рассмотрим предел плоской волны, т.е. $\alpha_0 = 0$ и $n = 0$ (для фиксированного \mathbf{r}). Предельные выражения для этих и других типов бесселевых пучков приведены в Табл. 1, они следуют из выражений в разделе 2.1.4.2.

Табл. 1. Электрическое поле в двух предельных случаях для различных типов бесселевых пучков. Определения составляющих функций даны в тексте. Выражения для других поляризаций можно получить вращением [Ур. (88) и (91)].

Тип	Описание	Поле	Предел плоской волны, $\times E_0 e^{ikz}$	Предел «пули», $\times E_0$
LE	Линейно поляризованное электрическое поле	$\mathbf{E}_{LE}^{(x)}$	\mathbf{e}_x	$i(\mathbf{F}_{n-1}^z - \mathbf{F}_{n+1}^z)$
LM	Линейно поляризованное магнитное поле	$\mathbf{E}_{LM}^{(x)}$	\mathbf{e}_y	$i(\mathbf{F}_{n-1}^t - \mathbf{F}_{n+1}^t)$
CS	Симметрично-круговая поляризация	$\mathbf{E}_{CS}^{(x)}$	\mathbf{e}_x	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}_{n-1}^t + \mathbf{F}_{n+1}^t) + i\mathbf{F}_{n-1}^z - i\mathbf{F}_{n+1}^z$
CS'	Альтернативный CS	$\mathbf{E}_{CS'}^{(x)}$	$\mathcal{O}(\alpha_0^4)$	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}_{n-1}^t + \mathbf{F}_{n+1}^t) + i\mathbf{F}_{n+1}^z - i\mathbf{F}_{n-1}^z$
TE	Поперечное электрическое поле	\mathbf{E}_{TE}	$\mathcal{O}(\alpha_0^2)$	$-2\mathbf{F}_n^t$
TM	Поперечное магнитное поле	\mathbf{E}_{TM}	$\mathcal{O}(\alpha_0^2)$	$2\mathbf{F}_n^z$
TEL	Линейная компонента TE	$\mathbf{E}_{TEL}^{(x)}$	$-\alpha_0 \mathbf{e}_x / 2$	$-\mathbf{F}_{n-1}^t - \mathbf{F}_{n+1}^t$

TML	Линейная компонента ТМ	$\mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x)}$	$-\alpha_0 \mathbf{e}_y / 2$	$\mathbf{F}_{n-1}^z + \mathbf{F}_{n+1}^z$
-----	---------------------------	---------------------------------	------------------------------	---

В частности, LE тип соответствует электрическому полю плоской волны той же поляризации, LM тип соответствует магнитному полю плоской волны той же поляризации и, следовательно, ортогональной (повернутой) поляризации электрического поля. CS тип приближается к линейно поляризованной плоской волне, что иллюстрирует, что CS связан не с круговой поляризацией, а скорее с осесимметричной интенсивностью (что всегда имеет место для любой поляризации плоской волны). Напротив, пучок CS' обращается в нуль в этом пределе для любого порядка n как $\mathcal{O}(\alpha_0^4)$ из-за взаимного сокращения вкладов от электрических и магнитных векторных потенциалов. Однако он является $\mathcal{O}(\alpha_0^3)$ для $n = 1$, а для $n = 2$ имеем $\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\text{CS}'}^{(x)} = \alpha_0^2 E_0 \mathbf{e}_+ / 8$, т. е. пучок CS' отдаленно связан с круговой поляризацией. Аналогичное предельное поведение получено для TE и TM пучков. Они равны $\mathcal{O}(\alpha_0^2)$ при $n = 0$, а при

$$n = 1 \Rightarrow \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\text{TE}} = -\alpha_0 E_0 \mathbf{e}_+ / 2, \quad \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\text{TM}} = i\alpha_0 E_0 \mathbf{e}_+ / 2, \quad (96)$$

что следует из предельных выражений для пучков TEL и TML нулевого порядка. Последние аналогичны LE и LM пучкам, но пропорциональны α_0 . Таким образом, TEL и TML пучки аналогичны линейным поляризациям плоской волны, а TE и TM пучки – круговой.

Другим иллюстративным пределом, рассмотренным в Табл. 1, является сильно сфокусированный бесселев пучок, т. е. $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$ ($k_z \rightarrow 0$, $k_t \rightarrow k$). В сочетании с короткими импульсами этот предел также известен как электромагнитная пуля [52]. Соответствующие выражения используют следующие сокращения:

$$\mathbf{F}_n^z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} f_n \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_n^t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} (f_{n-1} \mathbf{e}_+ + f_{n+1} \mathbf{e}_-), \quad (97)$$

а $f_n(\mathbf{r}) \xrightarrow{\alpha_0 \rightarrow \pi/2} J_n(k\rho)e^{in\varphi}$. Обратим внимание, что и \mathbf{F}_n^z , и \mathbf{F}_n^t являются собственными функциями оператора поворота:

$$\mathcal{R}_\psi \mathbf{F}_n^z = e^{-in\psi} \mathbf{F}_n^z, \quad \mathcal{R}_\psi \mathbf{F}_n^t = e^{-in\psi} \mathbf{F}_n^t, \quad (98)$$

поскольку $\tilde{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{e}_\pm = e^{\mp i\psi} \mathbf{e}_\pm$ [ср. Ур. (85), (89)]. Видно, что полученные выражения в двух рассматриваемых пределах качественно различны, в некоторых случаях поперечное поле меняется на продольное. Это неудивительно, учитывая сложные общие выражения полей для промежуточного α_0 .

Помимо поляризации, обсуждаемой в разделе 2.1.4.2, известны производные от известных поляризаций, в частности, круговые поляризации для бесселевых пучков LE, LM и CS, обозначенные верхним индексом $(1, \pm i)$ [11]. Сделаем очевидное обобщение этого определения для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{E}_{\dots}^{(\alpha, \beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \mathbf{E}_{\dots}^{(x)} + \beta \mathbf{E}_{\dots}^{(y)}, \quad (99)$$

который применяется к любой паре $\{\mathbf{E}^\perp, \mathbf{E}^\parallel\}$, включая пучки LE, LM, CS, CS', TEL и TML. Это определение представляет собой строгое соотношение между верхними индексами (x) , (y) и $(1,0)$, $(0,1)$ соответственно, используемыми для различных бесселевых пучков в литературе. В частности, $\mathbf{E}_{\text{LE,LM}}^{(1, \pm i)}$ можно рассматривать как обобщения плоских волн с круговой поляризацией, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ соответствуют повернутым линейным поляризациям плоской волны (с точностью до постоянного коэффициента). В частности, последняя аналогия применима к любым x - или y -поляризациям этих пучков. В терминах матрицы \mathbf{M} Ур. (99) можно представить в виде

$$\mathbf{M}^{(\alpha, \beta)} = \alpha \mathbf{M}^{(1,0)} + \beta \mathbf{M}^{(0,1)} = \mathbf{M}^{(1,0)} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (100)$$

что, используя Ур. (88), приводит к выражениям для различных типов пучков, собранным в Табл. 2. Отметим, что CS и CS' пучки описываются масштабированными (комплексными) ортогональными матрицами, т.е.

$$\mathbf{M}_{\text{CS}}^{(\alpha,\beta)} \mathbf{M}_{\text{CS}}^{(\alpha,\beta)T} = \mathbf{M}_{\text{CS}'}^{(\alpha,\beta)} \mathbf{M}_{\text{CS}'}^{(\alpha,\beta)T} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \mathbf{I}, \quad (101)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица. Однако $\mathbf{M}_{\text{CS}}^{(\alpha,\beta)}$ является кососимметричной (масштабированная матрица вращения), а $\mathbf{M}_{\text{CS}'}^{(\alpha,\beta)}$ является симметричной (масштабированная матрица отражения).

Табл. 2. Матрицы \mathbf{M} для обобщенных поляризаций различных типов бесселевых пучков.

Тип	\mathbf{M}
$\mathbf{E}_{\text{LE}}^{(\alpha,\beta)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\text{LM}}^{(\alpha,\beta)}$	$\begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\text{CS}}^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\text{CS}'}^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{1}{k_t} \begin{pmatrix} -k\alpha & -k\beta \\ -k_z\beta & k_z\alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\text{TML}}^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{1}{k_t} \begin{pmatrix} -k_z\beta & k_z\alpha \\ k\alpha & k\beta \end{pmatrix}$

Хотя в этом определении есть некоторая избыточность (умножение как α , так и β на один и тот же коэффициент приводит к тривиальному масштабированию полей), мы не постулируем какой-либо конкретной нормализации. Выбор нормализации очевиден в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (102)$$

Тогда матрица преобразования в Ур. (100) является именно матрицей поворота. В случае произвольных комплексных коэффициентов Ур. (102) также является вариантом, приводящим к матрице поворота для комплексного угла. Но эта нормировка неудобна, например, для упомянутого выше случая $(1, \pm i)$, так как тогда соответствующий угол поворота бесконечен:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} \mathbf{R}_{\mp i x} = \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Иной нормализацией может быть

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (104)$$

что сохраняет норму электрического поля (не сложно вывести, но не приводится в этой работе для краткости).

Важно отметить, что обобщенные поляризации имеют простое соотношение поворота для произвольного комплексного угла ψ :

$$\mathcal{R}_\psi \mathbf{E}_n^{(\alpha, \beta)} = e^{-in\psi} \left(\cos \psi \mathbf{E}_n^{(\alpha, \beta)} + \sin \psi \mathbf{E}_n^{(-\beta, \alpha)} \right), \quad (105)$$

для произвольных (α, β) и каждого типа бesselева пучка (индексы LE, LM, CS, CS', TEL и TML). Это соотношение следует из матричного представления и Ур. (88), (100). Результатом является прямое обобщение соотношения вращения для плоских волн [53]. Кроме того, обратим внимание, что по определению $\mathbf{E}_n^{(-1,0)} = -\mathbf{E}_n^{(1,0)}$ из Ур. (105) следует Ур. (87) для $\mathbf{E}_n^{(\alpha, \beta)}$. Таким образом, любую пару $\mathbf{E}_n^{(\alpha, \beta)}$ и $\mathbf{E}_n^{(-\beta, \alpha)}$ можно использовать как пару $\{\mathbf{E}^\perp, \mathbf{E}^\parallel\}$ [ср. Ур. (88)], но она становится вырожденным всякий раз, когда $(-\beta, \alpha)$ пропорционально (α, β) , что эквивалентно $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Последний случай соответствует обобщенным круговым поляризациям $(1, \pm i)$ (с точностью до постоянного множителя), которые нарушают нормировку, заданную Ур. (102) и являются собственными функциями оператора поворота:

$$\mathcal{R}_\psi \mathbf{E}_n^{(1,\pm i)} = e^{-i(n\pm 1)\psi} \mathbf{E}_n^{(1,\pm i)}. \quad (106)$$

Таким образом была показана взаимосвязь между различными поляризациями и типами бесселевых пучков.

2.2.1.5. Базисы бесселевых пучков

Обсуждение соотношений различных типов бесселевых пучков естественно приводит к вопросу: из каких пучков можно составить базис? Полноценное обсуждение этого вопроса приводится в статье [39]. Здесь же приведем только описание возможных базисов бесселевых пучков. Для этого важно установить некоторую меру сходства и различия разных типов по аналогии со скалярным произведением векторов, иными словами, рассмотреть соотношения ортогональности. Для этого сперва определим операцию скалярного произведения, через которое можно определить норму бесселевых пучков. Такая операция была введена с учетом функциональной зависимости полей бесселевых пучков от координаты (зависимость от z тривиальна, поэтому интегрирование по ней опускается) и нормировки

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{r})\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \xi(k_t, R) \int_{\rho \leq R} d^2 \boldsymbol{\rho} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2, \quad (107)$$

где $\xi(k_t, R)$ — нормировочный множитель, который вводится для того, чтобы сделать нормы бесселевых пучков конечными, и определяется из нормировки функции Бесселя при интегрировании по бесконечной площади

$$\int_{\rho \leq R} d^2 \boldsymbol{\rho} |J_n(k_t \rho)|^2 = 2\pi \int_0^R d\rho \rho |J_n(k_t \rho)|^2 \sim \xi^{-1}(k_t, R), \quad (108)$$

$$\xi(k_t, R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|k_t| \operatorname{Im} k_t}{\sinh(2R \operatorname{Im} k_t)} \xrightarrow{\operatorname{Im} k_t \rightarrow 0} \frac{|k_t|}{2R}. \quad (109)$$

Тогда скалярное произведение двух бесселевых пучков $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ определяется следующим образом

$$\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \xi(k_t, R) \int_{\rho \leq R} d^2 \boldsymbol{\rho} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}). \quad (110)$$

Используя матричное описание бesselевых пучков из предыдущих разделов, можно получить выражение для скалярного произведения двух бesselевых пучков через их матрицы

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle &= |\eta|^2 \langle \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \rangle = |E_0^2| \operatorname{tr} \left[(1 + \hat{k}_z^2) \mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2{}^H - 2i \hat{k}_z \mathbf{R} \mathbf{M}'_1 \mathbf{I}' \mathbf{M}'_2{}^H \right] \\ &= |E_0^2| \operatorname{tr} \left[(1 + \hat{k}_z^2) \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^H - 2 \hat{k}_z \mathbf{R} \mathbf{M}_1 \mathbf{R} \mathbf{M}_2^H \right] / 2, \end{aligned} \quad (111)$$

где \mathbf{I}' это матрица отражения

$$\mathbf{I}' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (112)$$

и мы для краткости ввели $\hat{k}_t \stackrel{\text{def}}{=} k_t/k = \sin \alpha_0$ и $\hat{k}_z \stackrel{\text{def}}{=} k_z/k = \cos \alpha_0$ (всегда вещественные). Теперь несложно вычислить нормы различных пучков, используя уравнение. (111) (и $\|\mathbf{E}(\mathbf{r})\|^2 = \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle$), результаты приведены в Табл. 3.

Табл. 3. Нормы различных типов бesselевых пучков. Результаты для у-поляризации такие же, как и для х-поляризации. Результаты для (α, β) поляризации отличаются только множителем $\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$.

Тип	$\ \mathbf{E}\ /E_0$
$\mathbf{E}_{\text{LE}}^{(x)}, \mathbf{E}_{\text{LM}}^{(x)}$	$\sqrt{(1 + \hat{k}_z^2)}/2$
$\mathbf{E}_{\text{CS}}^{(x)}$	$(1 + \hat{k}_z)/2$
$\mathbf{E}_{\text{CS}'}^{(x)}$	$(1 - \hat{k}_z)/2$
$\mathbf{E}_{\text{TEL}}^{(x)}, \mathbf{E}_{\text{TML}}^{(x)}$	$\hat{k}_t/\sqrt{2}$
$\mathbf{E}_{\text{TE}}, \mathbf{E}_{\text{TM}}$	\hat{k}_t

Обсудим далее скалярное произведение бесселевых пучков. Хотя LE и LM типы имеют простейшие матрицы \mathbf{M} (см. Табл. 2), они не составляют ортогонального базиса из-за последнего члена в Ур. (111)

$$\langle \mathbf{E}_{LM}^{(x)}, \mathbf{E}_{LE}^{(y)} \rangle = -\langle \mathbf{E}_{LE}^{(x)}, \mathbf{E}_{LM}^{(y)} \rangle = \hat{k}_z |E_0^2|. \quad (113)$$

Скалярное произведение других комбинаций поляризаций этих типов равно нулю из-за связи элементов матриц дуальностью или поворотами поляризации. В то же время скалярное произведение аналогичных комбинаций CS, CS', TEL и TML типов зануляется

$$\langle \mathbf{E}_{CS}^{(x)}, \mathbf{E}_{CS'}^{(x)} \rangle = \langle \mathbf{E}_{TEL}^{(x)}, \mathbf{E}_{TML}^{(y)} \rangle = 0. \quad (114)$$

Таким образом, мы определили два ортогональных базиса для пучков фиксированного порядка, заданного любой матрицей \mathbf{M} : {CS,CS'} и {TEL,TML} (используя две ортогональные линейные поляризации для каждого). Их легко сделать ортонормированным делением на соответствующие нормы (Табл. 3). После нормализации пары этих основных векторов связаны поворотом. Очевидно, что любой другой (четырёхмерный) поворот набора из четырех ортонормированных пучков создаст другой ортонормированный базис. Например, другим очевидным вариантом является $\{\mathbf{E}_{TEL}^{(1,\pm i)}, \mathbf{E}_{TML}^{(1,\pm i)}\}$, что соответствует ТЕ- и ТМ-пучкам порядков $n \pm 1$ [Ур. (94)] или, в более общем случае, ортогональному базису цилиндрических векторных волновых функций (см. разделы 2.1.4.2, 2.2.1.2 и 2.2.1.3). Интересно, что базис {CS, CS'} тесно связан с набором матриц Паули.

2.2.2. Разложение обобщенного бесселева пучка на плоские волны

Как уже было описано в разделе 2.1.5, угловое спектральное разложение бесселева пучка было описано только для нескольких типов. В данном разделе приводится вывод разложения для произвольного (обобщенного) бесселева пучка.

Для того, чтобы получить разложение, аналогичное Ур. (69), удобно сначала рассмотреть базисную функцию $f_n(\mathbf{r})$ через интегральное представление функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau, \quad (115)$$

тогда $f_n(\mathbf{r})$, определяемая Ур. (54), примет следующий вид

$$\begin{aligned} f_n(\rho, \varphi, z) &= J_n(k_t \rho) e^{in\varphi} e^{ik_z z} = \frac{e^{in\varphi} e^{ik_z z}}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau \\ &= \frac{(-1)^n e^{ik_z z}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\beta + x \cos(\beta - \varphi))} d\beta. \end{aligned} \quad (116)$$

Аналогичное выражение также можно получить через преобразование Фурье [54,55]. Выражение для обобщенного бesselева пучка легко получается из Ур. (81) и (116):

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = (-1)^n E_0 \int_0^{2\pi} \exp[ik_t \rho \cos(\beta - \varphi)] \mathbf{K} e^{in\beta} d\beta e^{ik_z z}, \quad (117)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{1}{4} \{ 3M_{e,x} + 4M_{m,y} \cos \alpha_0 + M_{e,x} \cos(2\alpha_0) \\ &\quad + 2 \sin^2 \alpha_0 [M_{e,x} \cos(2\beta) + M_{e,y} \sin(2\beta)] \}, \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} K_y &= \frac{1}{4} \{ 3M_{e,y} - 4M_{m,x} \cos \alpha_0 + M_{e,y} \cos(2\alpha_0) \\ &\quad + 2 \sin^2 \alpha_0 [-M_{e,y} \cos(2\beta) + M_{e,x} \sin(2\beta)] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_z &= \sin \alpha_0 [(-M_{m,x} + M_{e,y} \cos \alpha_0) \cos \beta - (M_{m,y} \\ &\quad + M_{e,x} \cos \alpha_0) \sin \beta] \end{aligned}$$

Таким образом, нам удалось получить выражение для электрического поля обобщенного бesselева пучка, которое можно реализовывать в коде ADDA.

Тем не менее, интересно более детально рассмотреть угловое спектрально разложение для «симметричных» типов. Наиболее простой вид

в декартовых координатах угловое спектральное разложение бесселева пучка принимает для CS типа. Это объясняется физическим смыслом такого разложения — пучок CS типа формируется при прохождении линейной поляризации плоской волны через аксикон. Разложение для CS типа довольно часто встречается в литературе, потому важно показать, что полученное выражение для обобщенного бесселева пучка совпадает для известного для CS типа [45] (с точностью до фазового множителя $(-i)^n$ и временной зависимости). Комбинируя Ур. (117) и (118), а также матрицу CS типа из Табл. 2, получается угловое спектральное разложение электрического поля x -поляризации CS типа

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{CS}}^{(x)}(\rho, \varphi, z) \\ = \frac{(-1)^n(1 + \cos \alpha_0)E_0}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \exp[ik_t \rho \cos(\beta - \varphi)] \mathbf{Q}_{\text{CS}}^{(x)} e^{in\beta} e^{ik_z z}, \end{aligned} \quad (119)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{CS}}^{(x)} = \begin{pmatrix} \sin^2 \beta + \cos \alpha_0 \cos^2 \beta \\ -(1 - \cos \alpha_0) \sin \beta \cos \beta \\ -\sin \alpha_0 \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (120)$$

И так же получается поле для y -поляризации CS типа

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{CS}}^{(y)}(\rho, \varphi, z) \\ = \frac{(-1)^n(1 + \cos \alpha_0)E_0}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \exp[ik_t \rho \cos(\beta - \varphi)] \mathbf{Q}_{\text{CS}}^{(y)} e^{in\beta} e^{ik_z z}, \end{aligned} \quad (121)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{CS}}^{(y)} = \begin{pmatrix} -(1 - \cos \alpha_0) \sin \beta \cos \beta \\ \cos^2 \beta + \cos \alpha_0 \sin^2 \beta \\ -\sin \alpha_0 \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (122)$$

Еще одним «симметричным» типом является CS' бесселев пучок, разложение которого ранее не описывалось в литературе. Как и в случае разложения для CS типа, можно скомбинировать Ур. (117) и (118), а также матрицу для CS' типа из Табл. 2, и получить угловое спектральное разложение электрического поля x -поляризации CS' типа

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\text{CS}'}^{(x)}(\rho, \varphi, z) \\ &= \frac{(-1)^n (1 - \cos \alpha_0) E_0}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \exp[ik_t \rho \cos(\beta - \varphi)] \mathbf{Q}_{\text{CS}'}^{(x)} e^{in\beta} e^{ik_z z}, \end{aligned} \quad (123)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{CS}'}^{(x)} = \begin{pmatrix} \sin^2 \beta - \cos \alpha_0 \cos^2 \beta \\ -(1 + \cos \alpha_0) \sin \beta \cos \beta \\ \sin \alpha_0 \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (124)$$

Аналогично получается выражение для у- поляризации CS' типа

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\text{CS}'}^{(y)}(\rho, \varphi, z) \\ &= \frac{(-1)^n (1 - \cos \alpha_0) E_0}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \exp[ik_t \rho \cos(\beta - \varphi)] \mathbf{Q}_{\text{CS}'}^{(y)} e^{in\beta} e^{ik_z z}, \end{aligned} \quad (125)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{CS}'}^{(y)} = \begin{pmatrix} -(1 + \cos \alpha_0) \sin \beta \cos \beta \\ \cos^2 \beta - \cos \alpha_0 \sin^2 \beta \\ \sin \alpha_0 \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (126)$$

В рамках общепринятого в литературе описания CS типа [12,19,45], можно объединить разложение «симметричных» типов через поляризационные параметры p_{x1}, p_{y1}, p_{x2} и p_{y2}

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = (-1)^n \frac{E_0}{2} \int_0^{2\pi} \exp[ik_t \rho \cos(\beta - \varphi)] \mathbf{Q}_{\text{о6}} e^{in\beta} d\beta e^{ik_z z}, \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{о6}} &= (1 + \cos \alpha_0) (p_{x1} \mathbf{Q}_{\text{CS}}^{(x)} + p_{y1} \mathbf{Q}_{\text{CS}}^{(y)}) \\ &\quad + (1 - \cos \alpha_0) (p_{x2} \mathbf{Q}_{\text{CS}'}^{(x)} + p_{y2} \mathbf{Q}_{\text{CS}'}^{(y)}) = \\ &\begin{pmatrix} \sin^2 \beta (p_{x1} + p_{x2}) + \cos \alpha_0 \cos^2 \beta (p_{x1} - p_{x2}) \\ -\sin \beta \cos \beta [(p_{x1} + p_{x2}) - \cos \alpha_0 (p_{x1} - p_{x2})] \\ -\sin \alpha_0 \cos \beta (p_{x1} - p_{x2}) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \beta [(p_{y1} + p_{y2}) - \cos \alpha_0 (p_{y1} - p_{y2})] \\ \cos^2 \beta (p_{y1} + p_{y2}) + \cos \alpha_0 \sin^2 \beta (p_{y1} - p_{y2}) \\ -\sin \alpha_0 \sin \beta (p_{y1} - p_{y2}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (128)$$

Такое представление соответствует разложению в базисе $\{\mathbf{E}_{\text{CS},n}^{(x,y)}, \mathbf{E}_{\text{CS}',n}^{(x,y)}\}$, а поляризационные параметры p_{x1}, p_{y1}, p_{x2} и p_{y2} являются коэффициентами разложения в этом базисе, что описывалось в разделе 2.2.1.5. Используя

определения матриц базисных векторов в Табл. 2, можно легко получить соотношения для поляризационных параметров через элементы матрицы \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{e,x} & M_{e,y} \\ M_{m,x} & M_{m,y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} p_{x1} &= M_{e,x} + M_{m,y}, & p_{y1} &= M_{e,y} - M_{m,x}, \\ p_{x2} &= M_{e,x} - M_{m,y}, & p_{y2} &= M_{e,y} + M_{m,x}. \end{aligned} \quad (129)$$

Выражение обобщенного бesselева пучка в базисе $\{\mathbf{E}_{CS,n}^{(x,y)}, \mathbf{E}_{CS',n}^{(x,y)}\}$ может представлять интерес для генерации различных типов бesselевых пучков с использованием конической линзы.

2.3. Моделирование

Как уже упоминалось ранее, в программном пакете ADDA уже имеется реализация всех типов бесселевых пучков [39]. В той же работе приводилось обсуждение обобщения для них формализма матриц рассеяния. Здесь же мы обсудим особенности реализации рассеяния бесселевых пучков, представленных через угловое спектральное разложение, и полученные результаты моделирования. Все моделирования с использованием ADDA, приведенные в этом разделе, проводились на ПК.

2.3.1. Реализация в коде ADDA

Для типов, у которых можно определить две нетривиальных поляризации (см. раздел 2.2.1.2), были реализованы отдельные командные опции в формате

$$-beam\ bessel\langle X\rangle\ \langle n\rangle\ \langle\alpha_0\rangle,$$

где $\langle X\rangle$ обозначает тип пучка, например LE, LM, CS, CS' (в командной строке обозначается как CSp), TEL и TML; аргументы $\langle n\rangle$ и $\langle\alpha_0\rangle$, соответствуют порядку и коническому углу бесселева пучка соответственно. Для всех остальных типов, например TE, TM и любых других нетривиальных линейных комбинаций, возможно задание в виде обобщенного бесселева пучка, т.е. через матрицу \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} -beam\ besselM\ \langle n\rangle\ \langle\alpha_0\rangle\ \langle Re\ M_{e,x}\rangle\ \langle Re\ M_{e,y}\rangle \\ \langle Re\ M_{m,x}\rangle\ \langle Re\ M_{m,y}\rangle \\ [\langle Im\ M_{e,x}\rangle\ \langle Im\ M_{e,y}\rangle\ \langle Im\ M_{m,x}\rangle\ \langle Im\ M_{m,y}\rangle. \end{aligned}$$

Здесь матрица \mathbf{M} задается через ее вещественную и мнимую части, причем мнимая часть опциональна, так как большинство известных типов определяется вещественной матрицей \mathbf{M} .

Несмотря на то, что выражения для падающего поля компактнее для представления в базисе $\{\mathbf{E}_{CS,n}^{(x,y)}, \mathbf{E}_{CS',n}^{(x,y)}\}$ (Ур. (127)), во избежание путаницы

и по аналогии с предыдущей реализацией командную строку для задания обобщенного бesselева пучка через угловое разложение удобно задавать также через матрицу \mathbf{M} , используя Ур. (117) и (118) и значения из Табл. 2:

$$\begin{aligned} & \text{-beam besselASDM } \langle n \rangle \langle \alpha_0 \rangle \langle \text{Re } M_{e,x} \rangle \langle \text{Re } M_{e,y} \rangle \langle \text{Re } M_{m,x} \rangle \\ & \langle \text{Re } M_{m,y} \rangle [\langle \text{Im } M_{e,x} \rangle \langle \text{Im } M_{e,y} \rangle \langle \text{Im } M_{m,x} \rangle \langle \text{Im } M_{m,y} \rangle]. \end{aligned}$$

Поляризационные параметры вычисляются в коде автоматически, согласно Ур. (129).

Алгоритм вычисления электрического поля бesselева пучка вблизи плоской подложки в коде следующий: проверка адекватности заданных значений (целый порядок пучка, проверка показателей преломления сред — пучок не может приходить из среды с бесконечным показателем преломления, все плоские волны в разложении приходят из одной и той же среды); вычисление коэффициентов Френеля для отдельной плоской волны из разложения; вычисления поля в каждом диполе в зависимости от направления распространения пучка (см. раздел 2.1.2). Важно отметить, что хотя в выражениях для углового спектрального разложения бesselевых пучков (Ур. (127)) идет интегрирование, для реализации в коде достаточно вычислить взвешенную сумму с конечным числом слагаемых N , а именно

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{E_0 e^{ik_z z}}{4\pi} \sum_{j=0}^N \exp(ik_t \rho \cos(\beta_j - \varphi)) \mathbf{Q}_{об}(\alpha_0, \beta_j) e^{in\beta_j}, \quad (130)$$

где $\beta_j = 2\pi j/N$ — дискретная величина, соответствующая переменной интегрирования в Ур. (127). Дальнейшее обсуждение оптимального числа слагаемых N приводится в следующем разделе.

2.3.2. Вычисление падающего поля

В этом разделе и далее для краткости будем обозначать бesselевы в представлении углового спектрального разложения как ASD пучки, а бesselевы пучки, выраженный напрямую через функции Бесселя из раздела

2.1.4.2, будем называть дэвисовыми (бесселевыми) пучками (Davis Bessel beams) по аналогии с описанием из [45]. Прежде чем приступить к обсуждению оптимизации вычисления поля вблизи плоской подложки важно понять, как много членов в угловом спектральном разложении нужно взять для эффективного вычисления поля бесселева пучка. Для этого можно изучить зависимость разницы между ASD пучком и уже реализованным ранее дэвисовым пучком от числа членов в разложении N . Ошибку в вычислении падающего электрического поля можно определить следующим образом:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_d} |\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_{\text{ref},i}|^2}{\sum_{i=1}^{N_d} |\mathbf{E}_{\text{ref},i}|^2}}, \quad (131)$$

где суммирование идет по всем диполям (всего $N_d = 2176$), а \mathbf{E}_i и $\mathbf{E}_{\text{ref},i}$ — тестируемое и эталонное падающее электрическое поле в i -ом диполе. В качестве эталонного поля берется поле CS дэвисова пучка. На Рис. 18 показана ε в логарифмическом масштабе в зависимости от числа плоских волн N в разложении ASD пучка с различными коническими углами α_0 и размером рассеивающей частицы 4 мкм.

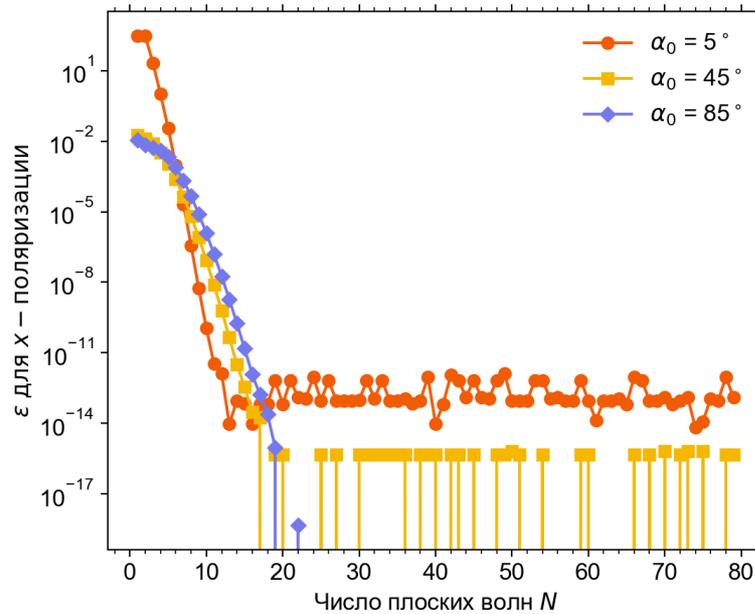


Рис. 18. Зависимость ошибки ε в вычислении x- поляризации падающего электрического поля для ASD и дэвисова бесселева пучка CS типа 2-го порядка при различных значениях конического угла α_0 и размере частицы 4 мкм.

Из графика очевидно, что несмотря на различную постоянную величину ошибки, все кривые перестают зависеть от числа слагаемых после некоторого значения. Можно заметить, что чем более сфокусирован пучок, тем больше нужно взять членов в разложении для того, чтобы кривые вышли на некоторую планку. Для слабо сфокусированного пучка можно взять $N = 14$, а для сильно сфокусированного $N = 24$. Тогда средние ошибки после $N = 24$ — $\varepsilon_{\text{mean}} = 1/60 \sum_{j=20}^{80} \varepsilon_j$ для пучков с $\alpha_0 = 5, 45, 85^\circ$ составляют 2.5×10^{-13} , 2.8×10^{-16} и 0 соответственно.

Тем не менее, результат может поменяться при вычислении поля на больших расстояниях от оси бесселева пучка. На Рис. 18 показана ε в логарифмическом масштабе в зависимости от числа плоских волн N в разложении ASD пучка с различными коническими углами α_0 и размером рассеивающей частицы 40 мкм.

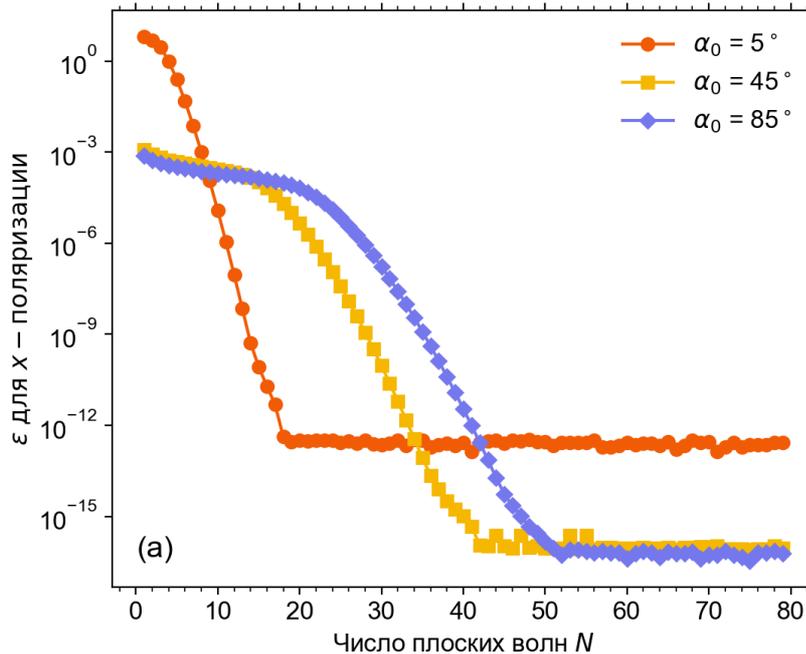


Рис. 19. Зависимость ошибки ε в вычислении x - поляризации падающего электрического поля для ASD и дэвисова бесселева пучка CS типа 2-го порядка при различных значениях конического угла α_0 и размере частицы 40 мкм.

Из графика очевидно, что несмотря на различную постоянную величину ошибки, все кривые перестают зависеть от числа слагаемых после некоторого значения. Аналогично прошлому графику можно увидеть зависимость оптимально числа плоских волн от конического угла. Для слабо сфокусированного пучка можно взять $N = 20$, а для сильно сфокусированного $N = 52$. Тогда средние ошибки после $N = 52$ — $\varepsilon_{\text{mean}} = 1/28 \sum_{j=52}^{80} \varepsilon_j$ для пучков с $\alpha_0 = 5, 45, 85^\circ$ составляют 2.4×10^{-13} , 9.3×10^{-17} и 6.4×10^{-17} соответственно.

Теперь, когда имеется реализация рассеяния обобщенного бесселева пучка, важно проверить, что совпадают падающие поля всех типов с дэвисовыми бесселевыми пучками, реализованными ранее в виде отдельных командных строк. В Табл. 4 приводятся ошибки ε для тестирования каждого типа при $n = 2$ и двух значениях конического угла

$\alpha_0 = 10^\circ$ и $\alpha_0 = 80^\circ$ для частицы 2 мкм. Аналогично проверим правильность вычислений полей для больших частиц в Табл. 5.

Табл. 4. Относительные ошибки ε в вычислении падающего поля ASD пучков в сравнении с полем дэвисовых пучков для слабо и сильно сфокусированного поля ($\alpha_0 = 10^\circ$ и $\alpha_0 = 80^\circ$) и $n = 2$ для $N = 24$ и размером рассеивающей частицы 2 мкм.

Тип	ε	
	$\alpha_0 = 10^\circ$	$\alpha_0 = 80^\circ$
LE	2.6×10^{-14}	4.1×10^{-17}
LM	0	0
CS	2.4×10^{-14}	0
CS'	0	0
TEL	3.2×10^{-17}	2.5×10^{-17}
TML	0	0

Табл. 5. Относительные ошибки ε в вычислении падающего поля ASD пучков в сравнении с полем дэвисовых пучков для слабо и сильно сфокусированного поля ($\alpha_0 = 10^\circ$ и $\alpha_0 = 80^\circ$) и $n = 2$ для $N = 52$ и размером рассеивающей частицы 40 мкм.

Тип	ε	
	$\alpha_0 = 10^\circ$	$\alpha_0 = 80^\circ$
LE	7.1×10^{-14}	3.8×10^{-13}
LM	1.3×10^{-14}	2.2×10^{-12}
CS	8.2×10^{-14}	3.5×10^{-13}
CS'	2.1×10^{-12}	5×10^{-13}
TEL	8.6×10^{-13}	3.7×10^{-13}
TML	1.1×10^{-12}	2.5×10^{-13}

Данные из таблиц позволяют сделать вывод о том, что для вычисления поля различных бесселевых пучков даже с большими аргументами достаточно взять $N = 52$ членов в разложении на плоские волны.

Определив эффективное число членов в угловом спектральном разложении, обсудим дальнейшую оптимизацию кода. В общем случае

наклонного падения бесселева пучка для задания падающего поля на частицу нужно вычислить волновые вектора и поля всех падающих плоских волн из разложения в Ур. (130), для каждой волны вычислить коэффициенты Френеля, которые зависят от нормальной компоненты волнового вектора и показателя преломления среды, вычислить результирующее поле с учетом отраженной или преломленной волны. А учитывая зависимость суммируемого в Ур. (130) от координаты, необходимо также повторить все эти вычисления в каждой точке диполя. Однако, можно выделить отдельные случаи, в которых можно упростить вычисление поля.

Самым простым случаем является нормальное падение бесселева пучка на плоскую подложку. Как известно из Ур. (36), для вычисления коэффициентов Френеля нам достаточно знать только углы между нормалью и волновыми векторами падающей, отраженной и преломленной плоских волн. В случае нормального падения бесселева пучка все плоские волны из разложения падают под одним углом к нормали границы раздела сред, поэтому вычисление поля в этом случае можно сильно упростить, вынося вычисление волновых векторов плоских волн и коэффициентов Френеля за цикл суммирования по плоским волнам в каждой точке диполя.

В случае наклонного падения каждая плоская волна падает под разным углом с нормалью границы раздела сред, и поэтому для каждой волны будут разные коэффициенты Френеля. Однако и в этом случае можно оптимизировать код, вычислив массив коэффициентов Френеля для каждой плоской волны до вычисления цикла по всем точкам диполей. Это сделано для эффективного вычисления рассеяния бесселевых пучков вблизи многослойной подложки (пока имеется только тестовая версия), когда время вычисления коэффициентов Френеля может быть довольно большим.

Падающее под углом 45° поле бесселева пучка, вычисляемого в ADDA, вблизи подложки показано на Рис. 20. Падающее поле можно

визуализировать путем вычисления поля на прямоугольной частице, в данном случае с размерами $40 \times 0.4 \times 20$ мкм и решеткой диполей $100 \times 1 \times 50$ по осям xuz . Однако полная картина падающего, отраженного и преломленного поля сверху и снизу границы раздела сред может быть получена только путем двух запусков ADDA, так как поле вычисляется только в одной среде.

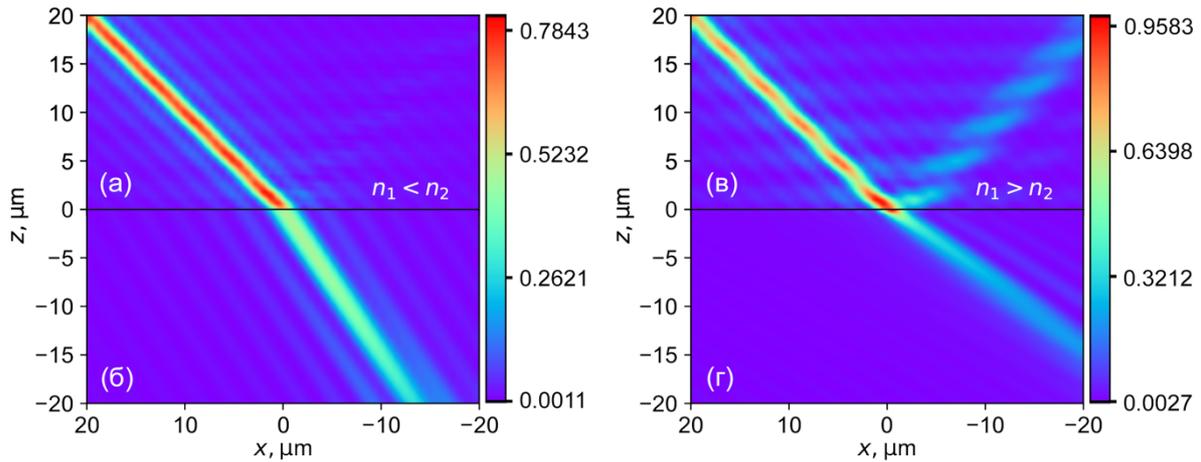


Рис. 20. Интенсивность CS бesselева пучка 0-го порядка с $\alpha_0 = 30^\circ$ вблизи границы раздела двух сред с показателями преломления а) и б) — $n_1 = 1, n_2 = 1.2$; и в) и г) — $n_1 = 1.2, n_2 = 1$. Верхняя пара графиков показывает падающее и отраженное поле, а нижняя пара — преломленное поле. Дифракционный параметр частицы $D_x/\lambda = 20$.

Также можно продемонстрировать случай полного внутреннего отражения при отражении бesselева пучка на границе раздела сред с $n_1 = 1.97$ и $n_2 = 1$ на Рис. 21. Похожие результаты приводились в статье [32].

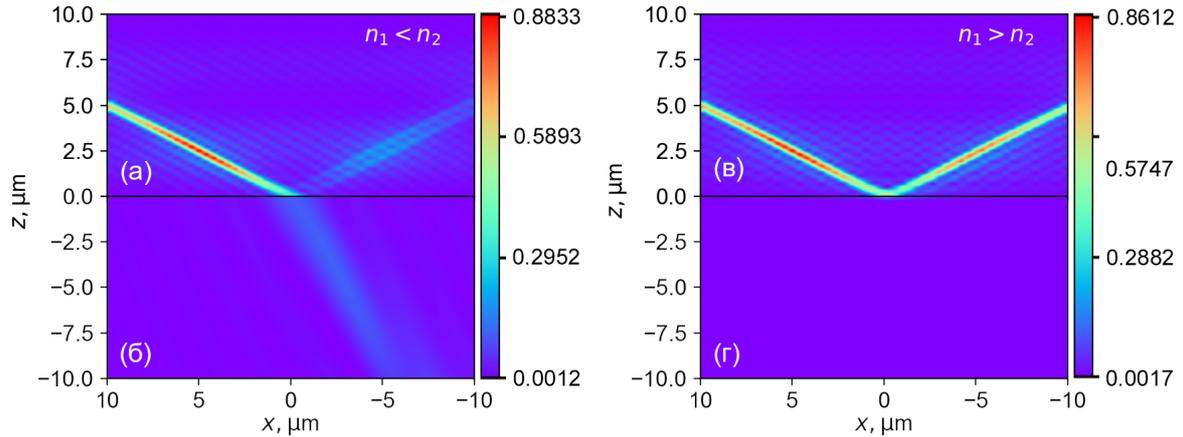


Рис. 21. Интенсивность CS бesselова пучка 0 порядка с $\alpha_0 = 30^\circ$ вблизи границы раздела двух сред с показателями преломления а) и б) — $n_1 = 1, n_2 = 1.97$; и в) и г) — $n_1 = 1.97, n_2 = 1$. Верхняя пара графиков показывает падающее и отраженное поле, а нижняя пара — преломленное поле. $D_x/\lambda = 40$.

2.3.3. Тестирование моделирования рассеяния

Для оценки ошибки вычисления индикатрис рассеяния в ADDA и сравнении с эталонными значениями можно использовать среднеквадратичное отклонение, определенное следующим образом [26]:

$$\text{RMSE} = \frac{1}{\max|I_{\text{ref}}(\theta_i)|} \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} (|I(\theta_i) - I_{\text{ref}}(\theta_i)|)^2}, \quad (132)$$

где I и I_{ref} — тестируемая и эталонная интенсивности рассеяния, $N_0 = 361$ — число углов рассеяния. Так как в литературе не встречалось каких-либо результатов для рассеяния бesselовых пучков частицами, находящимися вблизи подложки, можно только сравнивать индикатрисы в различных предельных случаях, описанных ниже.

Ввиду того, что в ADDA уже реализовано и протестировано рассеяние плоской волны частицами вблизи плоской подложки, важно убедиться, что и результаты для ASD бesselовых пучков должны равномерно сходиться к результатам для плоской волны в пределе плоской волны. Покажем на Рис. 22 сходимость индикатрис рассеяния бesselовых пучков к плоской

волне при рассеянии шаром, находящимся на плоской подложке. Среднеквадратичное отклонение RMSE индикатрис плоской волны и CS Бесселева пучка в пределе плоской волны равно 0.

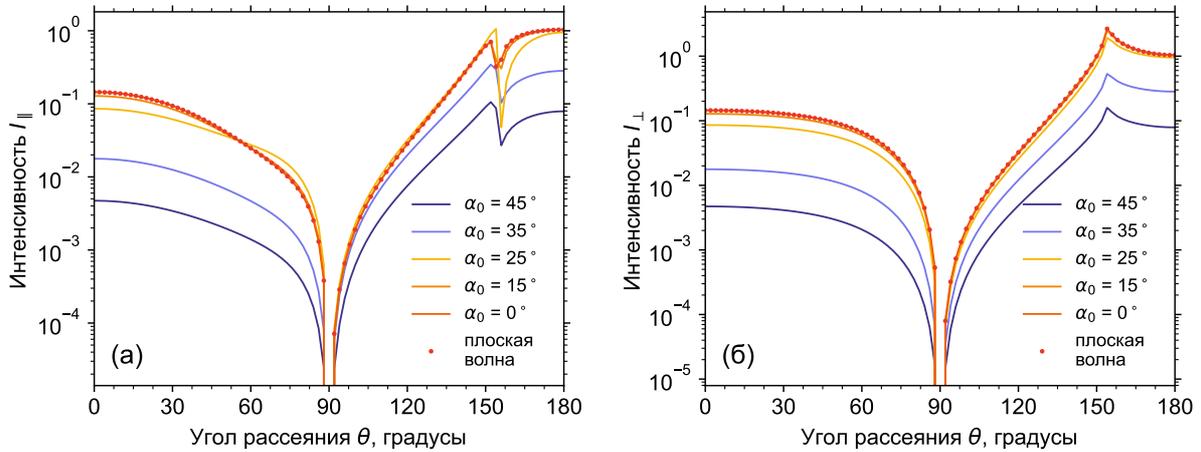


Рис. 22. Сходимость индикатрис рассеяния а) параллельной и б) перпендикулярной CS Бесселева пучка к плоской волне на шаре вблизи плоской подложки.

Также важно показать, что в случае, когда показатель преломления подложки равен показателю преломления среды, очевидно, что рассеяние ASD пучка также должно совпадать с рассеянием Бесселева пучка в пустом пространстве. В этом случае можно сравнивать с ранее реализованными в ADDA Бесселевыми пучками в пустом пространстве [39]. На Рис. 23 показана сходимость индикатрис рассеяния для ASD Бесселева пучка, рассеиваемого шаром на плоской подложке, к Дэвисовому пучку в пустом пространстве при уменьшении показателя преломления подложки к показателю преломления среды ($m_{\text{host}} = 1$). Параметры обоих пучков одинаковые: CS тип, $n = 2$, $\alpha_0 = 35^\circ$.

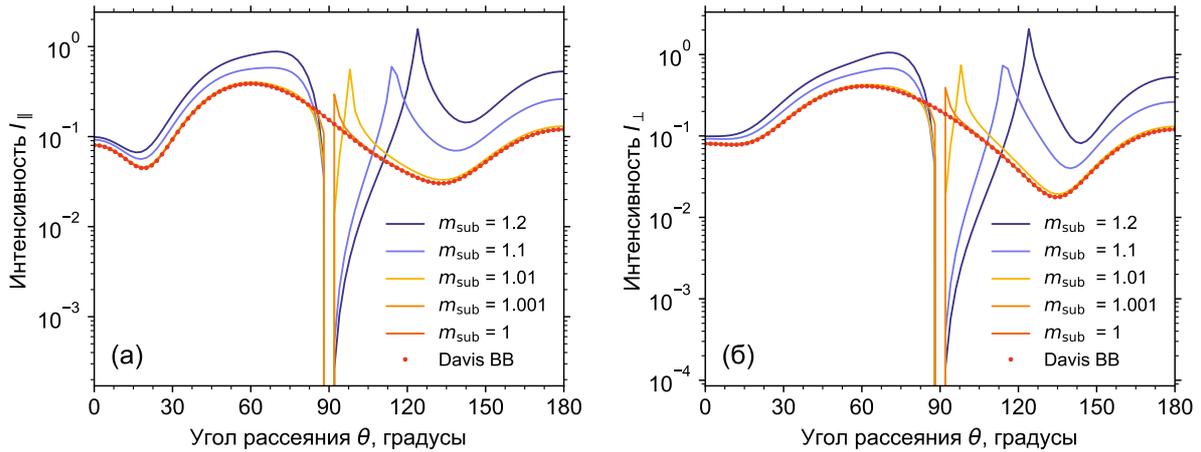


Рис. 23. Сходимость индикатрис рассеяния а) параллельной и б) перпендикулярной CS бesselева пучка к дэвисовому бesselеву пучку (обозначен Davis BB для краткости) в пустом пространстве, рассеивающегося на шаре вблизи плоской подложки.

На последнем графике четко виден разрыв в обеих индикатрисах на 90° (неравномерная сходимость по m_{sub} вблизи этого угла), который объясняется выполнением граничных условий при наличии подложки. Для индикатрис рассеяния ASD и дэвисова пучка частицей в пустом пространстве ($m_{\text{sub}} = m_{\text{host}} = 1$) среднеквадратичное отклонение RMSE составляет 3.5×10^{-10} и 2.1×10^{-10} в параллельной и перпендикулярных плоскостях соответственно.

2.3.4. Результаты моделирования

Текущая реализация кода [56] позволяет вычислять рассеяние всех типов бesselевых пучков произвольными частицами, находящимися вблизи плоской подложки. Последняя версия опубликована в отдельной ветке GitHub со свободным доступом. Здесь же только продемонстрируем результаты некоторых возможных моделирований.

Покажем, как различные типы бesselевых пучков рассеиваются кубом на плоской подложке. Геометрия частицы на подложке изображена и направление нормального падения пучка на Рис. 24.

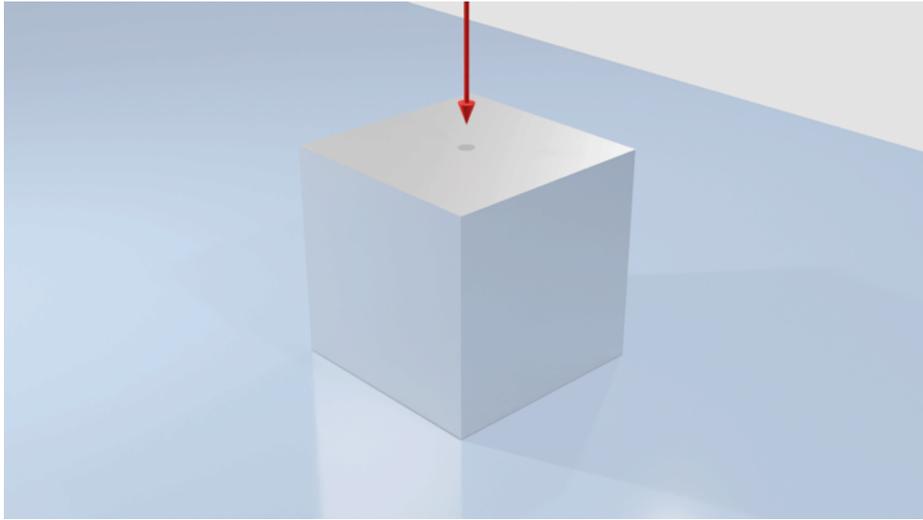


Рис. 24. Геометрия нормального падения пучка на куб, находящийся на плоской подложке.

На Рис. 25 и Рис. 26 для случая нормального и наклонного падения на подложку. В обоих случаях пучки падают «сверху», т.е. из среды, в которой находится частица.

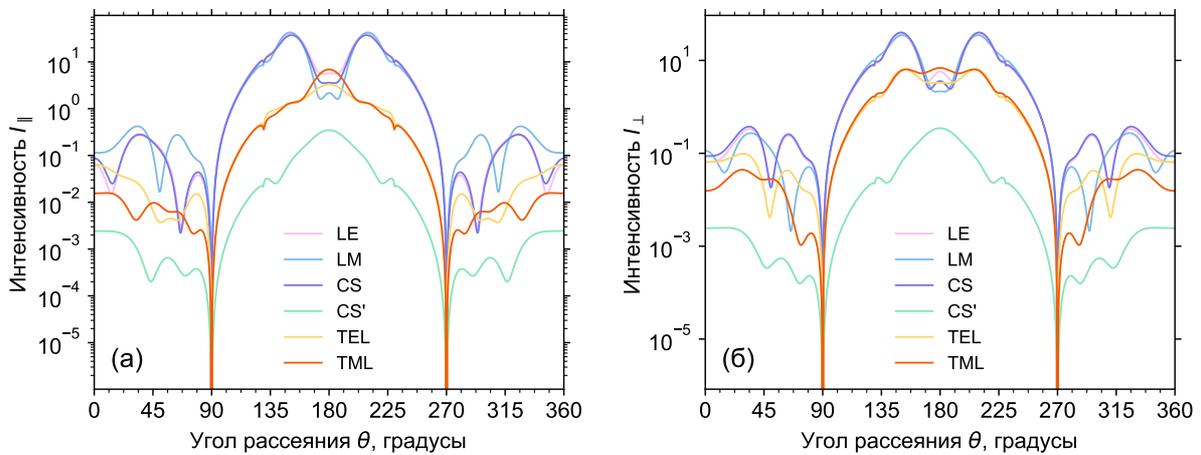


Рис. 25. Индикатрисы рассеяния различных типов бesselевых пучков с $n = 2$ и $\alpha_0 = 30^\circ$, падающих сверху по нормали к границе раздела сред на куб с $m = 1.5$, лежащий на подложке с показателем преломления $m_{\text{sub}} = 1.3$. Сторона куба $a = 1.5 \lambda$.

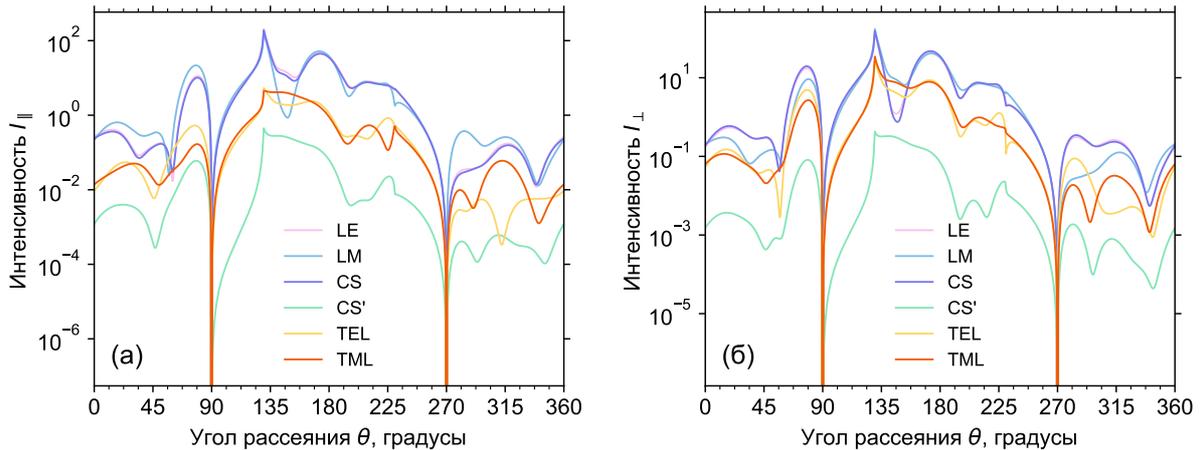


Рис. 26. Индикатрисы рассеяния различных типов бesselовых пучков с $n = 2$ и $\alpha_0 = 30^\circ$, падающих сверху под углом 45° к нормали границы раздела сред в плоскости xz на куб с $m = 1.5$, лежащий на подложке с показателем преломления $m_{\text{sub}} = 1.3$.

Сторона куба $a = 1.5 \lambda$.

Сравнение Рис. 25 и Рис. 26 показывает, как наклонное падение нарушает симметрию, наблюдающуюся при нормальном падении. Несмотря на то, что в обоих случаях время вычисления падающего поля на всех 8000 диполях значительно больше времени одной итерации (0.12 и 0.0036 с), падающее поле вычисляется только 1 раз, и такой результат является приемлемым (общее время такого моделирования составляет 0.93 с). И хотя текущая версия кода показывает хорошие результаты, код все еще можно оптимизировать и сократить время вычисления падающего поля.

2.4. Выводы

Разработанный код в программном пакете ADDA позволяет моделировать рассеяние различных типов векторных бесселевых пучков частицами, находящимися вблизи плоской подложки. ПО ADDA является реализацией метода дискретных диполей, который основывается на объемной дискретизации частиц. В коде реализована опция задания обобщенного бесселева пучка, определяемого четырьмя комплексными параметрами, описание которых приводится в этой работе. Электрическое поле в коде задается через суперпозицию плоских волн (метод углового спектрального разложения), что позволило эффективно реализовать рассеяние по аналогии с уже имеющейся в коде ADDA реализацией рассеяния плоских волн частицами, находящимися вблизи плоской подложки.

Текущая версия кода позволяет вычислять рассеяние бесселевых пучков как в случае нормального падения на подложку, так и при падении под углом при условии, что все плоские волны в разложении приходят из одной и той же среды. И хотя в литературе не встречалось результатов рассеяния бесселевых пучков частицами вблизи подложки, код был протестирован во всех возможных предельных случаях: в пределе плоской волны сравнивалось с имеющейся реализацией для плоских волн в ADDA; в пределе «оптически мягкой» подложки, когда показатель преломления подложки совпадает с показателем преломления среды, в которой находится частица, что сравнивалось с предыдущей реализацией всех типов «аналитических» или Дэвисовых бесселевых пучков в пустом пространстве.

Тем не менее, хотя разработанный код показывает хорошие результаты как по точности, так и по времени вычисления для несильно поглощающих частиц с размерами, сопоставимых с длиной волны, код нуждается в более подробном анализе и оптимизации для более специфичных случаев его применений. Помимо всего прочего, имеется потенциал для оптимизации

времени вычисления падающего поля путем уменьшения числа вычисления комплексных экспонент для плоских волн в каждом диполе, учитывая регулярность решетки диполей.

3. Заключение

С использованием метода дискретных диполей и его реализации в программном пакете ADDA, а также метода углового спектрального разложения, был реализован код, позволяющий вычислять рассеяние обобщенного векторного бесселева пучка произвольными частицами, находящимися вблизи плоской подложки. Так, обобщенный бесселев пучок был представлен в виде суперпозиции плоских волн, отражение и преломление каждой из которых вычисляется в коде с использованием формул Френеля. Текущая версия кода показывает хорошие результаты как по точности, так и по времени моделирования для наиболее распространенных конфигураций и рассеивающих частиц.

Дальнейшее развитие кода позволит вычисление оптических сил для манипуляции частицами вблизи подложки векторными бесселевыми пучками. Также имеющаяся реализация может служить основой для моделирования взаимодействия бесселевых пучков со сложными многослойными структурами и мета-поверхностями.

4. Источники

1. Пятницкий Л.Н. Волновые бесселевы пучки. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
2. Arlt J., Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon // *Opt. Commun.* 2000. Vol. 177, № 1–6. P. 297–301.
3. Vasara A., Turunen J., Friberg A.T. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1989. Vol. 6, № 11. P. 1748.
4. Qi M.Q., Tang W.X., Cui T.J. A Broadband Bessel Beam Launcher Using Metamaterial Lens // *Sci. Rep.* 2015. Vol. 5. P. 11732.
5. McGloin D., Dholakia K. Bessel beams: Diffraction in a new light // *Contemp. Phys.* 2005. Vol. 46, № 1. P. 15–28.
6. Garcés-Chávez V. et al. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam // *Nature.* 2002. Vol. 419, № 6903. P. 145–147.
7. Duocastella M., Arnold C.B. Bessel and annular beams for materials processing // *Laser Photonics Rev.* 2012. Vol. 6, № 5. P. 607–621.
8. Stoian R. et al. Ultrafast Bessel beams; advanced tools for laser materials processing // *Adv. Opt. Technol.* 2018. Vol. 7, № 3. P. 165–174.
9. Planchon T.A. et al. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination // *Nat. Methods.* 2011. Vol. 8, № 5. P. 417–423.
10. Wang Y., Dou W., Meng H. Vector analyses of linearly and circularly polarized Bessel beams using Hertz vector potentials // *Opt. Express.* 2014. Vol. 22, № 7. P. 7821.
11. Wang J.J. et al. General description of circularly symmetric Bessel beams of arbitrary order // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2016. Vol. 184. P. 218–232.

12. Wang J.J. et al. General description of transverse mode Bessel beams and construction of basis Bessel fields // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2017. Vol. 195. P. 8–17.
13. Mitri F.G. Axisymmetric scattering of an acoustical Bessel beam by a rigid fixed spheroid // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2015. Vol. 62, № 10. P. 1809–1818.
14. Ehsan A. et al. Unraveling the vector nature of generalized space-fractional Bessel beams // *Phys. Rev. A.* 2021. Vol. 104, № 2. P. 023512.
15. Vicente O.C., Caloz C. Bessel beams: A unified and extended perspective // *Optica*. Optical Society of America, 2021. Vol. 8, № 4. P. 451–457.
16. Bouchal Z., Olivík M. Non-diffractive Vector Bessel Beams // *J. Mod. Opt.* 1995. Vol. 42, № 8. P. 1555–1566.
17. Глухова С. Моделирование рассеяния бesselевых пучков малыми частицами с помощью метода дискретных диполей. Новосибирский Государственный Университет, 2020.
18. Bohren C.F., Huffman D.R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. New York: Wiley, 1983. 544 p.
19. Mitri F.G. et al. Resonance scattering of a dielectric sphere illuminated by electromagnetic Bessel non-diffracting (vortex) beams with arbitrary incidence and selective polarizations // *Ann. Phys.* 2015. Vol. 361. P. 120–147.
20. Han L. Scattering of a high-order Bessel beam by a spheroidal particle // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2018. Vol. 211. P. 129–137.
21. Qu T. et al. Interactions of high-order Bessel vortex beam with a multilayered chiral sphere: Scattering and orbital angular momentum spectrum analysis // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2018. Vol. 217. P. 363–372.
22. Chen Z. et al. Scattering of a zero-order Bessel beam by a concentric sphere // *J. Opt.* 2014. Vol. 16, № 5. P. 055701.

23. Li R. et al. Scattering of a high-order Bessel beam by a sphere // ISAPE2012. 2012. P. 833–836.
24. Silva G.T. Off-axis scattering of an ultrasound Bessel beam by a sphere // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2011. Vol. 58, № 2. P. 298–304.
25. Gong Z. et al. Arbitrary scattering of an acoustical Bessel beam by a rigid spheroid with large aspect-ratio // J. Sound Vib. 2016. Vol. 383. P. 233–247.
26. Yang M. et al. Computational study of scattering of a zero-order Bessel beam by large nonspherical homogeneous particles with the multilevel fast multipole algorithm // J. Opt. 2017. Vol. 19, № 12. P. 125606.
27. Gong Z. et al. T-matrix method for acoustical Bessel beam scattering from a rigid finite cylinder with spheroidal endcaps // Ocean Eng. 2017. Vol. 129. P. 507–519.
28. Brandão P.A., Pires D.G. Transmission and reflection of vector Bessel beams through an interface between dielectrics // Phys. Lett. A. 2017. Vol. 381, № 8. P. 813–816.
29. Liu J. et al. Reflection and transmission of a Bessel vortex beam by a stratified uniaxial anisotropic slab // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2020. Vol. 251. P. 107046.
30. Mugnai D. Bessel beam through a dielectric slab at oblique incidence: the case of total reflection // Opt. Commun. 2002. Vol. 207, № 1–6. P. 95–99.
31. Novitsky A.V., Barkovsky L.M. Total internal reflection of vector Bessel beams: Imbert–Fedorov shift and intensity transformation // J. Opt. Pure Appl. Opt. 2008. Vol. 10, № 7. P. 075006.
32. Salem M.A., Bağcı H. Behavior of obliquely incident vector Bessel beams at planar interfaces // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. Vol. 30, № 6. P. 1172.
33. Yurkin M.A., Hoekstra A.G. The discrete-dipole-approximation code ADDA: capabilities and known limitations // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2011. Vol. 112, № 13. P. 2234–2247.

34. Yurkin M.A., Hoekstra A.G. The discrete dipole approximation: an overview and recent developments // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2007. Vol. 106, № 1–3. P. 558–589.
35. Yurkin M.A., Hoekstra A.G. User Manual for the Discrete Dipole Approximation Code ADDA 1.4.0-alpha. P. 71.
36. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 664 p.
37. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. 3rd edition. New York: Wiley, 1998. 832 p.
38. Chang P.C.Y., Walker J.G., Hopcraft K.I. Ray tracing in absorbing media // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2005. Vol. 96, № 3–4. P. 327–341.
39. Glukhova S.A., Yurkin M.A. Vector Bessel beams: general classification and scattering simulations // *ArXiv220316510 Phys.* 2022.
40. Glukhova S.A., Yurkin M.A. Scattering of generalized Bessel beams simulated with the discrete dipole approximation // *J. Phys.: Conf. Ser.* Online: ITMO University, 2021. Vol. 2015. P. 012046.
41. Glukhova S.A., Yurkin M.A. Implementation of scattering of generalized Bessel beams in the framework of the discrete dipole approximation // *Proceedings of Bremen Zoom Workshop on Light Scattering 2021* / ed. Wriedt T., Eremin Y. Online, 2021. P. 43–44.
42. Glukhova S.A., Yurkin M.A. Scattering simulation of generalized Bessel beams by arbitrary particles // *Book of Abstracts of the 19th Conference on Electromagnetic & Light Scattering.* Online, 2021. P. 57.
43. Born M., Wolf E. Principles Of Optics. 4th ed. Pergamon Press, 1970.
44. Stratton J.A. Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Company, 1941.
45. Wang J.J. et al. General description of circularly symmetric Bessel beams of arbitrary order // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2016. Vol. 184. P. 218–232.

46. Yu M.P. et al. Electromagnetic scattering by multiple dielectric particles under the illumination of unpolarized high-order Bessel vortex beam // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2017. Vol. 195. P. 107–113.
47. Zhang H., Han Y., Han G. Expansion of the electromagnetic fields of a shaped beam in terms of cylindrical vector wave functions // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. Vol. 24, № 6. P. 1383.
48. Tai C.-T. Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory. 2nd ed. New York, NJ: IEEE Press, 1994. 343 p.
49. Salem M.A., Bağcı H. Reflection and transmission of normally incident full-vector X waves on planar interfaces // J. Opt. Soc. Am. A. 2012. Vol. 29, № 1. P. 139.
50. Olive D.I. Exact Electromagnetic Duality // Nucl. Phys. B - Proc. Suppl. 1996. Vol. 45, № 1. P. 88–102.
51. Donev S. A New Look on the Electromagnetic Duality Suggestions and Developments // Ann. Fond. Louis Broglie. 2002. Vol. 27. P. 621–640.
52. Salamin Y.I. Fields of a Bessel-Bessel light bullet of arbitrary order in an under-dense plasma: 1 // Sci. Rep. Nature Publishing Group, 2018. Vol. 8, № 1. P. 11362.
53. Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 448 p.
54. Vaity P., Rusch L. Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam // Opt. Lett. 2015. Vol. 40, № 4. P. 597.
55. Wang Q., Ronneberger O., Burkhardt H. Fourier Analysis in Polar and Spherical Coordinates. 2008.
56. <https://github.com/stefaniagl/adda/tree/besselASD>.